目　　录

第一章　基本概念

§1. 李　代　数

設 $\mathfrak{g}$ 是复数域 C 上的有限維向量空間（或称綫性空間），并設在 $\mathfrak{g}$ 中定义了一个求换位元素的运算（簡称换位运算），即对于 $\mathfrak{g}$ 中任意二元素 X 和 Y，$\mathfrak{g}$ 中都有唯一的一个元素与之相应。这个元素記作 $[X, Y]$，称为 X 和 Y 的换位元素。再設这个换位运算满足以下条件：

I. $[\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2, Y] = \lambda_1[X_1, Y] + \lambda_2[X_2, Y]$，对任意 X_1, X_2, $Y \in \mathfrak{g}$ 及任意复数 λ_1, λ_2.

II. $[X, Y] = -[Y, X]$，对任意 X, $Y \in \mathfrak{g}$.

III. $[X,[Y, Z]] + [Y,[Z, X]] + [Z, [X,Y]] = 0$，对任意 X, Y, $Z \in \mathfrak{g}$.

这时 $\mathfrak{g}$ 就称为复数域上的李代数，簡称为复李代数，有时更簡称为李代数。向量空間 $\mathfrak{g}$ 的維数称为李代数 $\mathfrak{g}$ 的維数，記作 $\dim \mathfrak{g}$.

条件 I 是說换位运算对于第一个因子是綫性的。利用 II，可以从 I 推出换位运算对于第二个因子也是綫性的：

I′. $[X, \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2] = \lambda_1[X, Y_1] + \lambda_2[X, Y_2]$，对任意 X, Y_1, $Y_2 \in \mathfrak{g}$ 及任意复数 λ_1, λ_2.

其次，利用 II，又可以从 III 推出

III′. $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$.

也可以将 III 写成

III″. $[X, [Y, Z]] = [[X,Y], Z] + [Y, [X, Z]]$.

通常我們将条件 III 称为 Jacobi 恆等式。最后在 II 中置 $X = Y$，我們有

II′. $[X, X] = 0$，对任意 $X \in \mathfrak{g}$.

我們举出下面几个例子.

例 1. 設 $\mathfrak{g}$ 是 C 上的任一有限維向量空間. 对于任意 $X, Y \in \mathfrak{g}$, 定义 $[X, Y] = 0$, 这时 I, II, III 自然成立. 于是 $\mathfrak{g}$ 成为一个李代数, 我們称 $\mathfrak{g}$ 是个交換李代数.

一般地, 李代数 $\mathfrak{g}$ 中如有两个元素 X 和 Y, 具有性質 $[X, Y] = 0$, 我們就說 X 和 Y 交換.

例 2. 設 V_3 是 C 上三維向量空間, 而 e_1, e_2, e_3 是 V_3 的一組基, 于是 V_3 中任一元素 x 皆可写作

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3.$$

再設 $y \in V_3$, 写

$$y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3.$$

定义

$$[X, Y] = (x_2y_3 - x_3y_2)e_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)e_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)e_3,$$

則 V_3 对于如此定义的換位运算組成一个李代数.

例 3. 設 $\mathfrak{g}_3$ 是 C 上 3×3 斜对称矩陣的全体, $\mathfrak{g}_3$ 可看作 C 上的向量空間. 如果对于任意 $X, Y \in \mathfrak{g}_3$, 定义 $[X, Y] = XY - YX$, 則 $\mathfrak{g}_3$ 就成为一个李代数.

我們可以在 $\mathfrak{g}_3$ 中选一組基

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

于是

$$[M_1, M_2] = M_3, \ [M_2, M_3] = M_1, \ [M_3, M_1] = M_2.$$

而 $\mathfrak{g}_3$ 中任一矩陣 X 可写作

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} = x_1M_1 + x_2M_2 + x_3M_3.$$

設

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -y_3 & y_2 \\ y_3 & 0 & -y_1 \\ -y_2 & y_1 & 0 \end{pmatrix} = y_1M_1 + y_2M_2 + y_3M_3,$$

则

$$[X, Y] = (x_2y_3 - x_3y_2)M_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)M_2 + (x_1y_2 - x_2y_1)M_3.$$

因之从 V_3 到 $\mathfrak{g}_3$ 的映射

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 \to X = x_1M_1 + x_2M_2 + x_3M_3$$

是一一映射且具有性质:

1) 如 $x \to X, y \to Y$,则对任意 $\lambda, \mu \in C, \lambda x + \mu y \to \lambda X + \mu Y$;

2) 如 $x \to X, y \to Y$,则$[x, y] \to [X, Y]$.

这就是說, V_3 和 $\mathfrak{g}_3$ 具有相同的代数結构.

一般說来,从李代数 $\mathfrak{g}_1$ 到 $\mathfrak{g}_2$ 之上的一一映射 $X \to Y$, 称为**同构**,如果它满足下述条件:

1) 如 $X_1 \to Y_1, X_2 \to Y_2$,则对任意 $\lambda, \mu \in C, \lambda X_1 + \mu X_2 \to \lambda Y_1 + \mu Y_2$.

2) 如 $X_1 \to Y_1, X_2 \to Y_2$, 则$[X_1, X_2] \to [Y_1, Y_2]$.

这时我們也說 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 同构, 記作 $\mathfrak{g}_1 \approx \mathfrak{g}_2$. 特别, 从李代数 $\mathfrak{g}$ 到自身之上的同构称为**自同构**.

李代数的基本問題之一就是定出所有互不同构的李代数.

設 $\mathfrak{g}$ 是 r 維李代数,并設 $X_1, \cdots, X_r$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一組基. 假定

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k X_k, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant r,$$

则 $\mathfrak{g}$ 中任意两个元素的换位元素可利用 c_{ij}^k 这 r^3 个常数計算出来,即如 $X = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i$, $Y = \sum_{j=1}^{r} \mu_j X_j$, 则

$$[X, Y] = \sum_{i,j,k=1}^{r} \lambda_i \mu_j c_{ij}^k X_k. \tag{1}$$

这样, $c_{ij}^k (i, j, k = 1, 2, \cdots, r)$ 这 r^3 个数就称为 $\mathfrak{g}$ 的一組結构常数. 不难驗証, $\mathfrak{g}$ 的一組結构常数 c_{ij}^k 满足以下关系式:

1) $c_{ij}^k = -c_{ji}^k$, $1 \leqslant i, j, k \leqslant r$

2) $\sum_{s=1}^{r}(c_{ij}^s c_{sk}^l + c_{jk}^s c_{si}^l + c_{ki}^s c_{sj}^l) = 0$, $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant r$.

反之，設 $\mathfrak{g}$ 是 r 維向量空間，$c_{ij}^k (i, j, k = 1, 2, \cdots, r)$ 是 r^3 个常数且滿足上述条件 1)和 2)．如果在 $\mathfrak{g}$ 中选一組基 $X_1, \cdots, X_r$，并利用(1)式来定义 $\mathfrak{g}$ 中两个元素 $X = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i$ 和 $Y = \sum_{j=1}^{r} \mu_j X_j$ 的换位元素，可以証明 $\mathfrak{g}$ 对于这样定义的换位运算組成一个李代数．

显而易見，可选取同构的李代数的基，使它們可以有同一組結构常数，而且有相同的結构常数組的李代数必同构．另一方面，李代数的結构常数組依賴于基的选取．設 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_r$ 是 $\mathfrak{g}$ 的另一組基，假定

$$[Y_i, Y_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}'^k Y_k, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant r.$$

設

$$Y_i = \sum_{j=1}^{r} a_i^j X_j, \quad 1 \leqslant i \leqslant r,$$

而 $\det(a_i^j) \neq 0$，于是有

$$\sum_{k=1}^{r} c_{ij}'^k a_k^l = \sum_{s,t=1}^{r} a_i^s a_j^t c_{st}^l, \quad 1 \leqslant i, j, l \leqslant r. \qquad (2)$$

因此，两个李代数同构当且仅当它們的結构常数組 c_{ij}^k 和 $c_{ij}'^k$ 适合关系式(2)，其中(a_i^j)为一非异矩陣．

最后，我們再举出下面的例子．

例 4. 設 $\mathfrak{gl}(n, C)$是 C 上所有 $n \times n$ 矩陣的集合．我們知道 $\mathfrak{gl}(n, C)$ 对于矩陣加法及数乘矩陣的乘法組成 C 上的一个 n^2 維向量空間．現在对于任意 $X, Y \in \mathfrak{gl}(n, C)$定义

$$[X, Y] = XY - YX,$$

則 $\mathfrak{gl}(n, C)$ 組成一李代数．

$\mathfrak{gl}(n, C)$ 亦可看作由 C 上某一 n 維向量空間 V 上的一切綫性变换所組成，这时常記作 $\mathfrak{gl}(V)$．有时我們采用这一观点，有时則采用另一观点，讀者可从上下文自明，因而常不加特殊声明．

§2. 子代数,理想,商代数

設 $\mathfrak{g}$ 是李代数, $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子集. 以 $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}$ 表由 $\mathfrak{g}$ 中一切形如 $M+N$ ($M \in \mathfrak{m}, N \in \mathfrak{n}$) 的元素所张成的向量子空間; 以 $[\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]$ 表由 $\mathfrak{g}$ 中一切形如 $[M, N]$ ($M \in \mathfrak{m}$, $N \in \mathfrak{n}$) 的元素所张成的向量子空間. 設 $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的子空間, 則有以下諸性質:

1) $[\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2, \mathfrak{n}] \subseteq [\mathfrak{m}_1, \mathfrak{n}]+[\mathfrak{m}_2, \mathfrak{n}]$;

2) $[\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]=[\mathfrak{n}, \mathfrak{m}]$;

3) $[\mathfrak{m}, [\mathfrak{n}, \mathfrak{p}]] \subseteq [\mathfrak{n}, [\mathfrak{p}, \mathfrak{m}]]+[\mathfrak{p}, [\mathfrak{m}, \mathfrak{n}]]$.

仍設 $\mathfrak{g}$ 是李代数. $\mathfrak{g}$ 的一个子空間 $\mathfrak{h}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的一个子代数,如果$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$; 换句話說,对任意 $X, Y \in \mathfrak{h}$ 总有$[X, Y] \in \mathfrak{h}$. $\mathfrak{g}$ 的一个子空間 $\mathfrak{h}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的一个理想,如果$[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$; 换句話說, 对任意 $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{h}$, 总有$[X, Y] \in \mathfrak{h}$. $\mathfrak{g}$ 的理想自然是 $\mathfrak{g}$ 的子代数. 如 $\mathfrak{h}_1$ 和 $\mathfrak{h}_2$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 則 $\mathfrak{h}_1+\mathfrak{h}_2$ 和 $\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的理想.

$\mathfrak{gl}(n, C)$ 的子代数称为**矩陣李代数**,也称为**綫性李代数**.

設 $\mathfrak{h}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想,象通常一样,可定义商空間 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$,它由 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的所有陪集(即同余类)組成. 如 $X \in \mathfrak{g}$,記 $\bar{X}=X+\mathfrak{h}$ 为 X 所属的 mod$\mathfrak{h}$ 的同余类,即商空間 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 中的一个元素. 定义

$$[\bar{X}, \bar{Y}]=\overline{[X, Y]}.$$

可以証明,这个定义与同余类中代表元素的选取无关. 这样,商空間 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 对于如此定义的换位运算組成一个李代数, 称为 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的**商代数**.

設 $\mathfrak{g}$ 是李代数, $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 于是可以定义一个从 $\mathfrak{g}$ 到商代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 之上的映射

$$X \rightarrow \bar{X}.$$

可以証明,这个映射滿足条件:

1) 如 $X \rightarrow \bar{X}$, $Y \rightarrow \bar{Y}$, 則对任意 $\lambda, \mu \in C$, $\lambda X+\mu Y \rightarrow \lambda \bar{X}+\mu \bar{Y}$;

2) 如 $X \to \bar{X}$, $Y \to \bar{Y}$, 則 $[X, Y] \to [\bar{X}, \bar{Y}]$.

一般說来，从李代数 $\mathfrak{g}$ 到李代数 $\mathfrak{g}_1$ 之中的一个映射

$$X \to X_1$$

称为一个同态，如果它满足条件：

1) 如 $X \to X_1$, $Y \to Y_1$, 則对任意 $\lambda, \mu \in C$, $\lambda X + \mu Y \to \lambda X_1 + \mu Y_1$;

2) 如 $X \to X_1$, $Y \to Y_1$, 則 $[X, Y] \to [X_1, Y_1]$.

如果这个同态是映上的，我們就說 $\mathfrak{g}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个同态象.

定理 1. 从 $\mathfrak{g}$ 到它的商代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 之上的映射 $X \to \bar{X}$ 是一个同态，称为自然同态，而 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个同态象. 反过来，設

$$f: X \to X_1$$

是从李代数 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}_1$ 之上的一个同态，将同态的核記作 $\mathfrak{h}$（即 $\mathfrak{g}$ 中在同态之下映到 0 的元素的全体），則 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个理想，而

$$\bar{f}: \bar{X} \to f(X)$$

是商代数 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 到 $\mathfrak{g}_1$ 之上的同构（$\bar{f}$ 称为由 f 所誘导出来的自然同构）.

証. 只需要証明定理的第二部分. 先証 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 設 $X, Y \in \mathfrak{h}$, 即 $f(X) = f(Y) = 0$, 則

$$f(X + Y) = f(X) + f(Y) = 0 + 0 = 0,$$

$$f(\lambda X) = \lambda f(X) = \lambda \cdot 0 = 0, \text{对任意 } \lambda \in C.$$

于是 $X + Y \in \mathfrak{h}$, $\lambda X \in \mathfrak{h}$, 这証明了 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子空間. 再設 $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{h}$, 則

$$f([X, Y]) = [f(X), f(Y)] = [f(X), 0] = 0.$$

因之 $[X, Y] \in \mathfrak{h}$, 这証明了 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想.

其次証明 $\bar{f}$ 的定义不依賴于同余类中元素的选取. 設 X, Y 屬同一同余类，即 $\bar{X} = \bar{Y}$, 那么 $X - Y = H \in \mathfrak{h}$. 于是

$$f(X - Y) = f(H) = 0,$$

因之 $f(X) = f(Y)$, 所以 $\bar{f}(\bar{X}) = \bar{f}(\bar{Y})$.

最后証明 $\bar{f}$ 是个同构，設 $\bar{X}$, $\bar{Y} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, 則

$$\bar{f}(\bar{X}+\bar{Y})=f(X+Y)=f(X)+f(Y)=\bar{f}(\bar{X})+\bar{f}(\bar{Y}),$$
$$\bar{f}(\lambda\bar{X})=f(\lambda X)=\lambda f(X)=\lambda\bar{f}(\bar{X}),\text{对 }\lambda\in C,$$
$$\bar{f}([\bar{X},\bar{Y}])=f([X,Y])=[f(X),f(Y)]=[\bar{f}(\bar{X}),\bar{f}(\bar{Y})].$$

因此$\bar{f}$是同态. 再設$\bar{f}(\bar{X})=\bar{f}(\bar{Y})$，而$\bar{X}$, $\bar{Y}\in\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$，那么

$$f(X-Y)=f(X)-f(Y)=\bar{f}(\bar{X})-\bar{f}(\bar{Y})=0.$$

于是$X-Y\in\mathfrak{h}$，因之$\bar{X}=\bar{Y}$. 这証明了$\bar{f}$是一一对应，因而是同构.

这样定理1就完全証明了.

为了說明以上概念，举出下面一些例子.

例 5. $\mathfrak{gl}(n, C)$中所有迹为0的矩陣組成一个子代数，記作A_{n-1}. 实际上，A_{n-1}还是$\mathfrak{gl}(n, C)$的理想，因为，如X, $Y\in\mathfrak{gl}(n, C)$，則

$$\mathrm{Tr}[X, Y]=\mathrm{Tr}(XY-YX)=0,$$

故$[X, Y]\in A_{n-1}$.

$\mathfrak{gl}(n, C)$中所有純量矩陣組成一个一維子代数，它也是$\mathfrak{gl}(n, C)$的理想，因为，如λI为純量矩陣，則对任意$X\in\mathfrak{gl}(n, C)$都有

$$[X, \lambda I]=X\cdot\lambda I-\lambda I\cdot X=0.$$

$\mathfrak{gl}(n, C)$中所有对角矩陣組成一个n維交換子代数，記作$\mathfrak{d}(n, C)$. $\mathfrak{gl}(n, C)$中所有迹为0的对角矩陣組成A_{n-1}的一个$n-1$維交換子代数.

例 6. 設M是$n\times n$矩陣. 适合条件

$$XM+MX'=0$$

的一切$n\times n$复系数矩陣X組成一个綫性李代数. 实际上，从$XM+MX'=0$及$YM+MY'=0$推出

$$\begin{aligned}[X, Y]M+M[X, Y]'&=(XY-YX)M+M(XY-YX)'\\&=XYM-YXM+MY'X'-MX'Y'\\&=-XMY'+YMX'-YMX'+XMY'=0.\end{aligned}$$

这个李代数記作$\mathfrak{g}(n, M, C)$. 容易驗証，如M_1和M_2合同，則$\mathfrak{g}(n, M_1, C)$与$\mathfrak{g}(n, M_2, C)$同构.

$\mathfrak{g}(n, M, C)$ 有以下重要特例：

設 M 是一个非奇异对称矩陣，这时我們得到正交代数。因任一复系数的非奇异对称矩陣皆与单位矩陣合同，因此正交代数可看作由所有斜对称矩陣組成。另外，任一复系数的非奇异对称矩陣或者合同于

$$\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix},\ \text{如 } n = 2m \text{ 是偶数,}$$

或者合同于

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_m \\ 0 & I_m & 0 \end{pmatrix},\ \text{如 } n = 2m + 1 \text{ 是奇数.}$$

因此正交代数分成两个系列，当 $n = 2m + 1$ 是奇数时記作 B_m，而当 $n = 2m$ 是偶数时記作 D_m。

設 M 是非奇异斜对称矩陣，这时 n 一定是偶数 $n = 2m$。任一非奇异斜对称矩陣皆合同于

$$\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix},$$

相应的代数称为辛代数，記作 C_m。

李代数 A_n, B_n, C_n 和 D_n 統称**典型李代数**。

§3. 单代数

設 $\mathfrak{g}$ 是李代数，显然 $\mathfrak{g}$ 本身以及仅由零向量組成的子代数 $\{0\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想。如果 $\mathfrak{g}$ 除了这两个理想之外，不再有其它的理想，就說 $\mathfrak{g}$ 是个**单李代数**。

显然一維李代数是单李代数，而維数大于1的交换李代数一定不是单李代数。因此，除了一維代数之外，单李代数都不是交换的。

定理 2. 代数 $A_n(n \geq 1)$, $B_n(n \geq 1)$, $C_n(n \geq 1)$ 和 $D_n(n \geq 3)$ 都是单李代数。

證. 我們先来逐一研究 A_n, B_n, C_n 和 D_n 的結构公式。

(A_n) 令 $m = n + 1$. 全体迹为 0 的 $m \times m$ 矩陣組成的李代

数就是 A_n，其維数为 n^2+2n。令

$$H_{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_m\end{pmatrix},$$

则所有 $H_{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m}$（而 $\sum_1^m \lambda_i=0$）的集合組成一个 n 維交换子代数 $\mathfrak{h}$. 以 E_{ik} 表 i 行 k 列位置上的元素为 1 而其余位置的元素皆为 0 的矩陣，再令

$$H_{\lambda_i-\lambda_k}=E_{ii}-E_{kk},\quad (i\neq k)$$

$$E_{\lambda_i-\lambda_k}=E_{ik},\quad (i\neq k)$$

则 $\mathfrak{h}$ 与所有 $E_{\lambda_i-\lambda_k}(i\neq k,\ i,\ k=1,\ 2,\cdots,\ m)$ 的綫性組合即是 A_n. $\lambda_i-\lambda_k(i\neq k, i, k=1,2,\cdots,m)$称为 A_n 的根. 如果 $n\geqslant 2$，則 A_n 的任意一个根皆可从 A_n 的任一个固定的根經逐次添加 A_n 的根得到. A_n 的結构公式是

$$\left.\begin{array}{ll}[H_1,H_2]=0, \text{对任意 } H_1,H_2\in\mathfrak{h}, & \\ [H_{\lambda_1\cdots\lambda_m},E_\alpha]=\alpha E_\alpha, & \text{对任一根 }\alpha\\ [E_\alpha,E_{-\alpha}]=H_\alpha, & \text{对任一根 }\alpha\\ [E_\alpha,E_\beta]=\begin{cases}0 &, \text{若 }\alpha+\beta\text{ 不是根}\\ \pm E_{\alpha+\beta}, & \text{若 }\alpha+\beta\text{ 是根}\end{cases} & \end{array}\right\}\qquad(1)$$

(B_n) 令 $m=2n+1$. 命

$$S=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & I^{(n)}\\ 0 & I^{(n)} & 0\end{pmatrix},$$

于是一切 $m\times m$ 的矩陣 X 适合条件

$$XS+SX'=0$$

者組成李代数 B_n. 将 $m\times m$ 矩陣 X 作与 S 同样的分块

$$X=\begin{pmatrix}a & u & v\\ w & A_{11} & A_{12}\\ z & A_{21} & A_{22}\end{pmatrix},$$

于是 $X \in B_n$ 当且仅当

$$a = 0,\ w = -v',\ z = -u',\ A_{11} = -A'_{22},\ A_{12} = -A'_{12},$$
$$A_{21} = -A'_{21};$$

换言之，B_n 由一切形如

$$\begin{pmatrix} 0 & u & v \\ -v' & A_{11} & A_{12} \\ -u' & A_{21} & -A'_{11} \end{pmatrix},\ A'_{12} = -A_{12},\ A'_{21} = -A_{21}$$

的矩陣組成，B_n 的維数是 $2n^2 + n$。令

$$H_{\lambda_1\cdots\lambda_n} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ & \lambda_1 & & & & & 0 & \\ & & \lambda_2 & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \lambda_n & & & \\ & & & & & -\lambda_1 & & \\ & 0 & & & & & -\lambda_2 & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & -\lambda_n \end{pmatrix},$$

则所有 $H_{\lambda_1\cdots\lambda_n}$ 的集合組成一个 n 維交換子代数 $\mathfrak{h}$. 再令

$$E_{\lambda_i-\lambda_k} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & E_{ik} & \\ & & -E_{ki} \end{pmatrix},\ E_{-\lambda_i+\lambda_k} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & E_{ki} & \\ & & -E_{ik} \end{pmatrix}, i < k$$

$$E_{\lambda_i+\lambda_k} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & E_{ik}-E_{ki} \\ & & 0 \end{pmatrix},\ E_{-\lambda_i-\lambda_k} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & -E_{ik}+E_{ki} & 0 \end{pmatrix}, i < k$$

$$E_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_i \\ -e'_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ E_{-\lambda_i} = \begin{pmatrix} 0 & -e_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e'_i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_{\lambda_i-\lambda_k}=\begin{pmatrix}0 & & \\ & E_{ii}-E_{kk} & \\ & & -E_{ii}+E_{kk}\end{pmatrix},\ i<k,$$

$$H_{\lambda_i+\lambda_k}=\begin{pmatrix}0 & & \\ & E_{ii}+E_{kk} & \\ & & -E_{ii}-E_{kk}\end{pmatrix},\ i<k,$$

$$H_{\lambda_i}=\begin{pmatrix}0 & & \\ & E_{ii} & \\ & & -E_{ii}\end{pmatrix},$$

其中 e_i 表第 i 个分量为 1，其余分量为 0 的 n 維向量。于是 $\mathfrak{h}$ 和 $E_{\pm\lambda_i\pm\lambda_k}(i<k)$，$E_{\pm\lambda_i}$ 的綫性组合即是 B_n。 $\pm\lambda_i\pm\lambda_k(i<k)$ 和 $\pm\lambda_i$ 称为 B_n 的根。 如果 $n\geqslant 2$，則 B_n 的任一根皆可从 B_n 的任一固定的根經逐步添加 B_n 的根而得到，B_n 的結构公式也是(1)。

(C_n) 令 $m=2n$。命

$$K=\begin{pmatrix}0 & I^{(n)}\\ -I^{(n)} & 0\end{pmatrix},$$

于是一切 $m\times m$ 矩陣 X 适合条件

$$XK+KX'=0$$

者組成李代数 C_n。显然，C_n 由所有形如

$$\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & -A'_{11}\end{pmatrix},\ A'_{12}=A_{12},\ A'_{21}=A_{21}$$

的矩陣組成，C_n 的維数是 $2n^2+n$。令

$$H_{\lambda_1\cdots\lambda_n}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & 0\\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_n & & & \\ & & & -\lambda_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & -\lambda_n\end{pmatrix},$$

则所有 $H_{\lambda_1\cdots\lambda_n}$ 的集合組成一个 n 維交換子代数 $\mathfrak{h}$. 再令

$$E_{\lambda_i-\lambda_k}=\begin{pmatrix}E_{ik} & 0\\ 0 & -E_{ki}\end{pmatrix},\ E_{-\lambda_i+\lambda_k}=\begin{pmatrix}E_{ki} & 0\\ 0 & -E_{ik}\end{pmatrix}, i<k,$$

$$E_{\lambda_i+\lambda_k}=\begin{pmatrix}0 & E_{ik}+E_{ki}\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ E_{-\lambda_i-\lambda_k}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ E_{ik}+E_{ki} & 0\end{pmatrix}, i<k,$$

$$E_{2\lambda_i}=\begin{pmatrix}0 & E_{ii}\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ E_{-2\lambda_i}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ E_{ii} & 0\end{pmatrix},$$

$$H_{\lambda_i-\lambda_k}=\begin{pmatrix}E_{ii}-E_{kk} & 0\\ 0 & -E_{ii}+E_{kk}\end{pmatrix},\ i<k,$$

$$H_{\lambda_i+\lambda_k}=\begin{pmatrix}E_{ii}+E_{kk} & 0\\ 0 & -E_{ii}-E_{kk}\end{pmatrix}, i<k,$$

$$H_{2\lambda_i}=\begin{pmatrix}E_{ii} & 0\\ 0 & -E_{ii}\end{pmatrix},$$

于是 $\mathfrak{h}$ 和 $E_{\pm\lambda_i\pm\lambda_k}(i<k)$, $E_{\pm2\lambda_i}$ 的綫性組合即是 C_n. $\pm\lambda_i\pm\lambda_k$ $(i<k)$ 和 $\pm2\lambda_i$ 称为 C_n 的根. 如果 $n\geqslant2$, 則 C_n 的任意一个根也可以从 C_n 的任一固定的根經逐步添加 C_n 的根而得到. C_n 的結构公式也是(1).

(D_n) 令 $m=2n$. 命

$$S=\begin{pmatrix}0 & I^{(n)}\\ I^{(n)} & 0\end{pmatrix},$$

于是一切 $m\times m$ 矩陣 X 适合条件

$$XS+SX'=0$$

者組成李代数 D_n. 显然, D_n 由所有形为

$$\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & -A_{11}'\end{pmatrix},\ A_{12}'=-A_{12},\ A_{21}'=-A_{21}$$

的矩陣組成, D_n 的維数是 $2n^2-n$. 令

$$H_{\lambda_1\cdots\lambda_n}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & 0\\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_n & & & \\ & & & -\lambda_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & -\lambda_n\end{pmatrix},$$

則所有 $H_{\lambda_1\cdots\lambda_n}$ 的集合組成一个 n 維交換子代数 $\mathfrak{h}$. 再令

$$E_{\lambda_i-\lambda_k}=\begin{pmatrix}E_{ik} & 0\\ 0 & -E_{ki}\end{pmatrix},\ E_{-\lambda_i+\lambda_k}=\begin{pmatrix}E_{ki} & 0\\ 0 & -E_{ik}\end{pmatrix}, i<k,$$

$$E_{\lambda_i+\lambda_k}=\begin{pmatrix}0 & E_{ik}-E_{ki}\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad E_{-\lambda_i-\lambda_k}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -E_{ik}+E_{ki} & 0\end{pmatrix}, i<k,$$

$$H_{\lambda_i-\lambda_k}=\begin{pmatrix}E_{ii}-E_{kk} & 0\\ 0 & -E_{ii}+E_{kk}\end{pmatrix},\ i<k,$$

$$H_{\lambda_i+\lambda_k}=\begin{pmatrix}E_{ii}+E_{kk} & 0\\ 0 & -E_{ii}-E_{kk}\end{pmatrix}, i<k,$$

于是 $\mathfrak{h}$ 和 $E_{\pm\lambda_i\pm\lambda_k}(i<k)$的綫性組合即是 D_n. $\pm\lambda_i\pm\lambda_k(i<k)$称为 D_n 的根. 如 $n\geqslant 3$, 則 D_n 的任一根皆可由 D_n 的任一固定的根經逐步添加 D_n 的根而得. D_n 的結构公式也是 (1).

現在我們可以証明 $A_n(n\geqslant 1)$, $B_n(n\geqslant 1)$, $C_n(n\geqslant 1)$ 及 D_n $(n\geqslant 3)$是单李代数. 以 $\mathfrak{g}$ 表所考慮的代数, 即 $A_n(n\geqslant 1)$, $B_n(n\geqslant 1)$, $C_n(n\geqslant 1)$ 或 $D_n(n\geqslant 3)$之一. 設 $\mathfrak{n}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个非 0 理想, 我們要証明 $\mathfrak{n}=\mathfrak{g}$. 在 $\mathfrak{n}$ 中任取一非 0 元素

$$A=H_0+\sum_{\alpha\in\Sigma}\lambda_\alpha E_\alpha,$$

其中 $H_0\in\mathfrak{h}$ 而 Σ 表 $\mathfrak{g}$ 的所有根的集合. 不妨假定有一个 $\lambda_\alpha\neq 0$; 因为如若不然, $A=H_0\in\mathfrak{h}$, $H_0\neq 0$, 于是由 (1) 中第二式知一定有一个 E_α 使$[H_0, E_\alpha]=\alpha_0E_\alpha\neq 0$, 这样 $E_\alpha\in\mathfrak{n}$.

由 $A\in\mathfrak{n}$ 得

$$[\underbrace{H,\cdots,[H,[}_{r\text{个}}H, A]]\cdots]=\sum_{\alpha\in\Sigma}\lambda_\alpha\alpha^rE_\alpha\in\mathfrak{n},\ r=1, 2, \cdots \quad (2)$$

以 l 表 $\mathfrak{g}$ 的根的个数，并将 $\mathfrak{g}$ 的 l 个根记作 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l$，则 $l\times l$ 行列式

$$V(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=\begin{vmatrix}\alpha_1\cdots\alpha_l\\ \alpha_1^2\cdots\alpha_l^2\\ \cdots\cdots\\ \alpha_1^l\cdots\alpha_l^l\end{vmatrix}=\prod_i \alpha_i\prod_{i>k}(\alpha_i-\alpha_k)\neq 0.$$

因此可选取 $\lambda_1^0,\cdots,\lambda_n^0$ 使 $V(\lambda_1^0,\cdots,\lambda_n^0)\neq 0$. 将 (2) 中第 r 式乘以 $V(\lambda_1^0,\cdots,\lambda_n^0)$ 中 α^r 的代数余子式，然后相加，即得

$$V(\lambda_1^0,\cdots,\lambda_n^0)\lambda_\alpha E_\alpha\in\mathfrak{n}.$$

由此推出 $E_\alpha\in\mathfrak{n}$.

对于 A_n, B_n, C_n 当 $n\geqslant 2$ 时，而对于 D_n 当 $n\geqslant 3$ 时，它们的根皆可将根陆续添加到 α 上而得到，故由 (1) 中第四式知，对所有的根 α, $E_\alpha\in\mathfrak{n}$. 再由 (1) 中第三式知，对所有根 α, $H_\alpha\in\mathfrak{n}$. 这就证明了 $\mathfrak{n}=\mathfrak{g}$.

对于 A_1, B_1, C_1, 我们有 $[E_\alpha,E_{-\alpha}]=H_\alpha\in\mathfrak{n}$. 因这时 $\mathfrak{h}$ 是一维的. 故 $\mathfrak{h}\subseteq\mathfrak{n}$. 于是 $[H,E_{-\alpha}]=-\alpha E_{-\alpha}\in\mathfrak{n}$. 故这时也有 $\mathfrak{g}=\mathfrak{n}$.

定理 2 至此证毕.

§4. 直　和

设 $\mathfrak{g}$ 是李代数，并设 $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2,\cdots,\mathfrak{g}_m$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 如果 $\mathfrak{g}$ 的任一元素 X 皆可表成 $\mathfrak{g}_1$ 中一元素，$\mathfrak{g}_2$ 中一元素，…与 $\mathfrak{g}_m$ 中一元素的和

$$X=X_1+X_2+\cdots+X_m, X_i\in\mathfrak{g}_i(1\leqslant i\leqslant m),$$

而且这种表示法是唯一的，我们就说 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2,\cdots,\mathfrak{g}_m$ 的**直和**，并记作 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\dot{+}\mathfrak{g}_2\dot{+}\cdots\dot{+}\mathfrak{g}_m$.

设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2,\cdots,\mathfrak{g}_m$ 的直和，则对 $i\neq j$, $\mathfrak{g}_i\cap\mathfrak{g}_j=\{0\}$, 这是因为如 $X\in\mathfrak{g}_i\cap\mathfrak{g}_j$, 则

$$\begin{aligned}X&=0+\cdots+0+\underset{i}{X}+0+\cdots+0\\&=0+\cdots+0+\underset{j}{X}+0\cdots+0\end{aligned}$$

是 X 的两种表成 $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2,\cdots,\mathfrak{g}_m$ 中元素的和的表法. 由表法的唯一

性推出 $X=0$. 由 $\mathfrak{g}_i\cap\mathfrak{g}_j=\{0\}$, 对 $i\neq j$, 推出 $[\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_j]=0$, 对 $i\neq j$.这是因为 $\mathfrak{g}_i$, $\mathfrak{g}_j$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 于是 $[\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_j]\subseteq\mathfrak{g}_i\cap\mathfrak{g}_j=\{0\}$.

如果 $\mathfrak{g}$ 是它的理想 $\mathfrak{g}_1,\cdots,\mathfrak{g}_m$ 的直和, 则 $\mathfrak{g}_i$ 的理想也是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 实际上,設 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}_i$ 的理想,则由 $[\mathfrak{h},\mathfrak{g}_j]\subset[\mathfrak{g}_i,\mathfrak{g}_j]=0$, 对一切 $j\neq i$ 推出

$$[\mathfrak{h},\mathfrak{g}]\subset[\mathfrak{h},\mathfrak{g}_1]+\cdots+[\mathfrak{h},\mathfrak{g}_m]=[\mathfrak{h},\mathfrak{g}_i]\subset\mathfrak{h}.$$

由上述性質可推出,如 $\mathfrak{g}$ 是它的理想 $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2,\cdots,\mathfrak{g}_r,\mathfrak{h}$ 的直和, $\mathfrak{h}$ 又是它的理想 $\mathfrak{g}_{r+1},\cdots,\mathfrak{g}_m$ 的直和,则 $\mathfrak{g}_1,\cdots,\mathfrak{g}_r,\mathfrak{g}_{r+1},\cdots,\mathfrak{g}_m$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的理想,而 $\mathfrak{g}$ 是它們的直和. 实际上,首先由上述性質推出, $\mathfrak{h}$ 的理想 $\mathfrak{g}_{r+1},\cdots,\mathfrak{g}_m$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的理想;其次,設 $X\in\mathfrak{g}$, 则 X 可表成

$$X=X_1+\cdots+X_r+H,\ X_i\in\mathfrak{g}_i\,(1\leqslant i\leqslant r),\ H\in\mathfrak{h}$$

而 H 又可表成

$$H=X_{r+1}+\cdots+X_m,\ X_i\in\mathfrak{g}_i\,(r+1\leqslant i\leqslant m).$$

于是

$$X=X_1+\cdots+X_r+X_{r+1}+\cdots+X_m,\ X_i\in\mathfrak{g}_i\,(1\leqslant i\leqslant m).$$

假如还有

$$X=Y_1+\cdots+Y_r+Y_{r+1}+\cdots+Y_m,\ Y_i\in\mathfrak{g}_i\,(1\leqslant i\leqslant m),$$

则因 $Y_{r+1},\cdots,Y_m\in\mathfrak{h}$ 及 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}_1,\cdots,\mathfrak{g}_r,\mathfrak{h}$ 的直和推出

$$X_1=Y_1,\cdots,X_r=Y_r,X_{r+1}+\cdots+X_m=Y_{r+1}+\cdots+Y_m.$$

再从 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}_{r+1},\cdots,\mathfrak{g}_m$ 的直和推出

$$X_{r+1}=Y_{r+1},\cdots,X_m=Y_m.$$

这証明了 $\mathfrak{g}$ 中任一元素可表成 $\mathfrak{g}_1$ 中一元, $\mathfrak{g}_2$ 中一元,… 与 $\mathfrak{g}_m$ 中一元的和, 而且这种表法唯一. 因此 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_2,\cdots,\mathfrak{g}_m$ 的直和.

我們举出下面这个关于直和的例子.

例 7. $\mathfrak{gl}(n,C)$是 A_{n-1} 和純量矩陣組成的一維李代数的直和.

我們已經知道 A_{n-1} 和純量矩陣組成的一維子代数都是 $\mathfrak{gl}(n,C)$的理想,現在我們来証明 $\mathfrak{gl}(n,C)$ 中任一元素 X 皆可表成 A_{n-1} 中一元素与一純量矩陣之和,而且表法唯一. 設 $\mathrm{Tr}X=\chi$, 則

$$X = \left(X - \frac{\chi}{n} I_n\right) + \frac{\chi}{n} I_n.$$

由于 $\mathrm{Tr}\left(X - \frac{\chi}{n} I_n\right) = \chi - n \cdot \frac{\chi}{n} = 0$，故 $X - \frac{\chi}{n} I_n \in A_{n-1}$. 又設

$$X = X_1 + \lambda_1 I = Y_1 + \lambda_2 I,$$

其中 $X_1, Y_1 \in A_{n-1}$, λ_1, λ_2 为复数，那么 $X_1 - Y_1 = (\lambda_1 - \lambda_2)I$. 从 $\mathrm{Tr}(X_1 - Y_1) = \mathrm{Tr}X_1 - \mathrm{Tr}Y_1 = 0$ 推出 $\mathrm{Tr}(\lambda_1 - \lambda_2)I = n(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$，因此 $\lambda_1 = \lambda_2$，于是 $X_1 = Y_1$ 这証明了表法的唯一性.

§5. 导来鏈与降中心鏈

設 $\mathfrak{g}$ 是李代数. 以 $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ 表 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$，称为 $\mathfrak{g}$ 的导代数. 如果 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想，則 $\mathscr{D}\mathfrak{h}$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 实际上，

$$[\mathfrak{g}, \mathscr{D}\mathfrak{h}] = [\mathfrak{g}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]] \subset [\mathfrak{h}, [\mathfrak{h}, \mathfrak{g}]] + [\mathfrak{h}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{h}]]$$
$$\subset [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] + [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \mathscr{D}\mathfrak{h}.$$

我們用归納法来定义一系列子代数：$\mathscr{D}^{(0)}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$, $\mathscr{D}^{(1)}\mathfrak{g} = \mathscr{D}\mathfrak{g}, \cdots, \mathscr{D}^{(n+1)}\mathfrak{g} = \mathscr{D}(\mathscr{D}^{(n)}\mathfrak{g}), \cdots$，这样我們得到一系列子代数

$$\mathscr{D}^{(0)}\mathfrak{g} \supset \mathscr{D}^{(1)}\mathfrak{g} \supset \cdots \supset \mathscr{D}^{(n)}\mathfrak{g} \supset \cdots.$$

每一个子代数都是 $\mathfrak{g}$ 的理想，这一系列子代数称为 $\mathfrak{g}$ 的**导来鏈**. 如果有一个正整数 n 存在，使 $\mathscr{D}^{(n)}\mathfrak{g} = \{0\}$，則 $\mathfrak{g}$ 称为**可解李代数**.

关于可解李代数有以下性質：

1. 可解李代数的子代数是可解的；可解李代数的同态象（特别，可解李代数的商代数）也是可解的.

2. 設 $\mathfrak{g}$ 是李代数，$\mathfrak{h}$ 是它的理想，如果 $\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 都可解，則 $\mathfrak{g}$ 也可解.

3. 可解李代数的直和也可解.

这些性質的証明都很簡单，因而略去.

設 $\mathfrak{g}$ 是李代数，$\mathfrak{g}$ 的理想 $\mathfrak{h}$ 如果是个可解李代数，就称 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的可解理想. 如果 $\mathfrak{g}$ 除了零代数之外，不再含其它的可解理想，$\mathfrak{g}$

就称为半单李代数．一个等价的定义是：如果 $\mathfrak{g}$ 不含非零交换理想，就称 $\mathfrak{g}$ 为半单李代数．实际上，非零交换理想当然是可解理想．反之，設 $\mathfrak{n}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个非零可解理想，于是有非負整数 n 存在，使 $\mathscr{D}^{(n-1)}\mathfrak{n} \neq \{0\}$，而 $\mathscr{D}^{(n)}\mathfrak{n} = \{0\}$．于是 $\mathscr{D}^{(n-1)}\mathfrak{n}$ 就是 $\mathfrak{g}$ 的一个非零交换理想．

W. Killing 和 E. Cartan 証明了[1]

"半单李代数一定是它所有的极小理想（它們一定是单代数，而且个数有限）的直和"（李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个理想 $\mathfrak{h}$ 称为极小理想，如果它是 $\mathfrak{g}$ 的非 0 理想而且包在 $\mathfrak{h}$ 中的 $\mathfrak{g}$ 的理想只有 $\mathfrak{h}$ 本身和 $\{0\}$）．

这个結果也說明了上节引入的直和这个概念的意义，这个結果的証明将在第四章給出．

有不是半单的单李代数存在，一維单代数是唯一的例子．除此而外，单李代数都是半单的．今后总假定单李代数一定半单，即不把一維李代数看成单李代数．

設 $\mathfrak{g}$ 是李代数．如 $\mathfrak{n}_1$ 和 $\mathfrak{n}_2$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的可解理想，則 $\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2$ 亦然．实际上，設有非負整数 n_1 和 n_2 使 $\mathscr{D}^{(n_1)}\mathfrak{n}_1 = \{0\}$，$\mathscr{D}^{(n_2)}\mathfrak{n}_2 = \{0\}$，則

$$\mathscr{D}(\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2) = [\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2, \mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2] \subset [\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_1] + \mathfrak{n}_2$$
$$= \mathscr{D}\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2.$$

設 $\mathscr{D}^{(m)}(\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2) \subset \mathscr{D}^{(m)}\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2$，$m$ 是非負整数，則

$$\mathscr{D}^{(m+1)}(\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2) \subset [\mathscr{D}^{(m)}\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2, \mathscr{D}^{(m)}\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2] \subset$$
$$\subset [\mathscr{D}^{(m)}\mathfrak{n}_1, \mathscr{D}^{(m)}\mathfrak{n}_1] + \mathfrak{n}_2 = \mathscr{D}^{(m+1)}\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2.$$

因此

$$\mathscr{D}^{(n_1)}(\mathfrak{n}_1 + \mathfrak{n}_2) \subset \mathfrak{n}_2.$$

1) W. Killing, Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen I, II, III, IV, *Math. Ann.* **31** (1888), 252—290; **33** (1889), 1—48; **34** (1889), 57—122; **36** (1890), 161—189. E. Cartan, Sur la structure des groupes de transformations finis et continus, Thèse, Paris, 1894.

于是

$$\mathscr{D}^{(n_1+n_2)}(\mathfrak{n}_1+\mathfrak{n}_2)\subset\mathscr{D}^{(n_2)}\mathfrak{n}_2=\{0\}.$$

这就証明了 $\mathfrak{n}_1+\mathfrak{n}_2$ 也可解. 这样 $\mathfrak{g}$ 就有唯一的一个极大可解理想,称为 $\mathfrak{g}$ 的根基,記作 $\mathfrak{r}$. 我們有

定理 3. 如果 $\mathfrak{g}$ 不可解,则 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 半单.

証. 設 $\bar{\mathfrak{g}}_1$ 是 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 的一个可解理想, 如以 $\mathfrak{g}_1$ 表 $\bar{\mathfrak{g}}_1$ 在自然同态下的原象,则 $\mathfrak{g}_1$ 可解. 因之 $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{r}$, $\bar{\mathfrak{g}}_1=\{0\}$,故 $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 半单.

我們再来引进降中心鏈.

設 $\mathfrak{g}$ 是李代数. 令 $C^{(0)}\mathfrak{g}=\mathfrak{g}$, $C^{(1)}\mathfrak{g}=[\mathfrak{g}, C^{(0)}\mathfrak{g}],\cdots, C^{(n+1)}\mathfrak{g}==[\mathfrak{g}, C^{(n)}\mathfrak{g}]$. 可以証明 $C^{(n+1)}\mathfrak{g}\subset C^{(n)}\mathfrak{g}$, 而且 $C^{(n)}\mathfrak{g}$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的理想 $(n=0,1,\cdots)$. 实际上, $C^{(1)}\mathfrak{g}\subset C^{(0)}\mathfrak{g}=\mathfrak{g}$, 而从 $C^{(n)}\mathfrak{g}\subset C^{(n-1)}\mathfrak{g}$ 推出

$$C^{(n+1)}\mathfrak{g}=[\mathfrak{g}, C^{(n)}\mathfrak{g}]\subset[\mathfrak{g}, C^{(n-1)}\mathfrak{g}]=C^{(n)}\mathfrak{g}.$$

再設 $C^{(n-1)}\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想,则

$$[\mathfrak{g}, C^{(n)}\mathfrak{g}]\subset[\mathfrak{g}, C^{(n-1)}\mathfrak{g}]=C^{(n)}\mathfrak{g},$$

因此 $C^{(n)}\mathfrak{g}$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 这样,我們得到一系列子代数

$$C^{(0)}\mathfrak{g}\supset C^{(1)}\mathfrak{g}\supset\cdots\supset C^{(n)}\mathfrak{g}\supset\cdots,$$

每一个都是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 这个系列称为 $\mathfrak{g}$ 的降中心鏈. 如果有一正整数 n 存在使 $C^{(n)}\mathfrak{g}=\{0\}$, 则 $\mathfrak{g}$ 称为冪零. 因此 $\mathfrak{g}$ 冪零, 当且仅当有正整数 n 存在使

$$[X_n,[\cdots[X_2, X_1]\cdots]]=0, \text{对任意 } X_1,\cdots,X_n\in\mathfrak{g}.$$

可以証明 $\mathscr{D}^{(n)}\mathfrak{g}\subset C^{(n)}\mathfrak{g}$. 实际上,从 $\mathscr{D}^{(n)}\mathfrak{g}\subset C^{(n)}\mathfrak{g}$ 推出

$$\mathscr{D}^{(n+1)}\mathfrak{g}=[\mathscr{D}^{(n)}\mathfrak{g}, \mathscr{D}^{(n)}\mathfrak{g}]\subset[\mathfrak{g}, C^{(n)}\mathfrak{g}]=C^{(n+1)}\mathfrak{g}.$$

因此我們有

1. 如 $\mathfrak{g}$ 冪零,则 $\mathfrak{g}$ 可解.

关于冪零李代数,还有以下性质:

2. 冪零李代数的子代数是冪零的. 冪零李代数的同态象(特别商代数)也是冪零的.

3. 冪零李代数的直和也冪零.

这两个性质的証明都很簡单,因而略去.

最后，我們举出可解矩陣李代数与幂零矩陣李代数的例子。

例 8. $\mathfrak{gl}(n, C)$中所有上三角形矩陣，即一切形为

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_{nn} \end{pmatrix}$$

的矩陣組成一个李代数，記作$\mathfrak{t}(n, C)$. 而$\mathfrak{t}(n, C)$中对角綫元素皆相等的矩陣也組成一个李代数，記作$\mathfrak{n}(n, C)$. 我們来証明$\mathfrak{t}(n, C)$可解，而$\mathfrak{n}(n, C)$幂零.

为此目的，以$\mathfrak{n}_i(1 \leqslant i \leqslant n)$表$\mathfrak{n}(n, C)$中一切形为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots 0 & x_{1i} & \cdots & x_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots\cdots 0 & x_{2i+1} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \ddots & & x_{n-i+1n} \\ \vdots & & \ddots & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

的矩陣所組成的集合，而以$\mathfrak{n}_{n+1}$表仅由零矩陣組成的集合. 我們用归納法来証明

$$C^{(i-1)}\mathfrak{n}(n, C) \subset \mathfrak{n}_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n+1. \tag{2}$$

当$i = 1$时，$C^{(0)}\mathfrak{n}(n, C) = \mathfrak{n}(n, C) = \mathfrak{n}_1$，所以公式(2)成立. 設公式(2)对于某一正整数$i \leqslant n$成立，記矩陣(1)为A. 令

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1n} \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \lambda_{n-1\,n} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

为$\mathfrak{n}(n, C)$中任一元，則

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda x_{1i} & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda x_{2i+1} & & * & \\ & & & & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & & \ddots & \lambda x_{n-i+1n} & \\ & & & & & & & \ddots & 0 \\ & & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda x_{1i} & & & \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & \lambda x_{2i+1} & * & \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & & & & \lambda x_{n-i+1\,n} & \\ \vdots & & & & & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

于是$[A, B]\in \mathfrak{n}_{i+1}$,因之

$C^{(i)}\mathfrak{n}(n, C) = [\mathfrak{n}(n, C), C^{(i-1)}\mathfrak{n}(n, C)]\subset[\mathfrak{n}(n, C), \mathfrak{n}_i]\subset\mathfrak{n}_{i+1}$.

因此公式(2)对于 $i+1$ 也成立. 因为 $\mathfrak{n}_{n+1}=0$, 所以 $C^{(n)}\mathfrak{n}(n, C) = \{0\}$,这就証明了 $\mathfrak{n}(n, C)$冪零。

其次,由于$[\mathfrak{t}(n, C), \mathfrak{t}(n, C)]\subset\mathfrak{n}(n, C)$,所以 $\mathscr{D}\mathfrak{t}(n, C)$ 也冪零,因而可解. 于是 $\mathfrak{t}(n, C)$也可解.

在第二章中我們将証明: 由 n 阶矩陣組成的可解李代数一定相似于 $\mathfrak{t}(n, C)$的一个子代数;由 n 阶矩陣組成的冪零李代数一定相似于某个 $\mathfrak{n}(n_1, C)\dot{+}\mathfrak{n}(n_2, C)\dot{+}\cdots\dot{+}\mathfrak{n}(n_m, C)$ 的一个子代数,而 $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ 是 n 的一个分拆.

§6. Killing 型

設 $\mathfrak{g}$ 是 r 个李代数,设 $A\in\mathfrak{g}$,定义

$$\mathrm{ad}A X = [A, X], \quad X\in\mathfrak{g}$$

則 $\mathrm{ad}A$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的綫性变换且滿足条件

$$\mathrm{ad}A[X, Y] = [\mathrm{ad}A X, Y] + [X, \mathrm{ad}A Y],(\text{即 §1 III}'').$$

$\mathrm{ad}A$ 称为由 A 誘导出的内导子. 有时为了表明它所作用的空間是 $\mathfrak{g}$, 我們也記 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}A$.

映射

$$A \to \mathrm{ad}A$$

是从 $\mathfrak{g}$ 映入 $\mathfrak{gl}(r, C)$ 的一个映射, 我們来証明这是个同态. 这只要証明

1) $\mathrm{ad}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{ad}A + \mu \mathrm{ad}B$,

2) $\mathrm{ad}[A, B] = [\mathrm{ad}A, \mathrm{ad}B]$.

实际上, 对任意 $X \in \mathfrak{g}$, 我們有

$$\mathrm{ad}(\lambda A + \mu B)X = [\lambda A + \mu B, X] = \lambda[A, X] + \mu[B, X]$$
$$= \lambda \mathrm{ad}AX + \mu \mathrm{ad}BX,$$

因此条件 1)成立. 其次

$$\mathrm{ad}[A, B]X = [[A, B], X] = [[A, X], B] + [A, [B, X]]$$
$$= [\mathrm{ad}AX, B] + [A, \mathrm{ad}BX] = -\mathrm{ad}B\mathrm{ad}AX$$
$$+ \mathrm{ad}A\mathrm{ad}BX = [\mathrm{ad}A, \mathrm{ad}B]X,$$

因此条件 2)也成立. 映射 $A \to \mathrm{ad}A$ 的象記作 $\mathrm{ad}\mathfrak{g}$, 而它的核由一切具性質: 对所有 $X \in \mathfrak{g}$ 有 $[A, X] = 0$ 的 $A \in \mathfrak{g}$ 組成. 这种元素称为 $\mathfrak{g}$ 的中心元素, 全体中心元素組成 $\mathfrak{g}$ 的中心, 它是 $\mathfrak{g}$ 的一个理想.

$\mathfrak{g}$ 上綫性变换 $\mathrm{ad}X$ 的特征多項式

$$f(\lambda | X) = |\lambda I_r - \mathrm{ad}X| = \lambda^r + a_1(X)\lambda^{r-1} + \cdots + a_{r-n_X}(X)\lambda^{n_X}$$

称为 X 的 Killing 多項式, n_X 是 $\mathrm{ad}X$ 的特征值中等于零的个数. 因为 $\mathrm{ad}XX = 0$, 所以 $n_X \geqslant 1$. 令

$$n = \min_{X \in \mathfrak{g}} n_X,$$

則 n 称为 $\mathfrak{g}$ 的秩. 如 $X \in \mathfrak{g}$ 而 $n_X = n$, 則 X 称为 $\mathfrak{g}$ 的正則元素; 如 $n_X > n$, 則 X 称为 $\mathfrak{g}$ 的奇异元素.

設 $X, Y \in \mathfrak{g}$. 定义

$$(X, Y) = \mathrm{Tr}\ \mathrm{ad}X\mathrm{ad}Y.$$

显而易見, (X, Y) 有以下性質:

1) $(X, Y)=(Y, X)$,

2) $(\lambda_1 X_1+\lambda_2 X_2, Y)=\lambda_1(X_1, Y)+\lambda_2(X_2, Y)$.

因此 (X, Y) 是 $\mathfrak{g}$ 上的一个对称双綫性函数，称为 $\mathfrak{g}$ 上的 Killing 型，也称为 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 內积. 关于 Killing 型还有以下重要性質:

3) $(\operatorname{ad} AX, Y)+(X, \operatorname{ad} AY)=0$.

实际上,

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{ad} AX, Y)+(X, \operatorname{ad} AY) &= \operatorname{Tr} \operatorname{ad}[A, X] \operatorname{ad} Y+\operatorname{Tr} \operatorname{ad} X \operatorname{ad}[A, Y] \\
&= \operatorname{Tr} \operatorname{ad} A \operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y-\operatorname{Tr} \operatorname{ad} X \operatorname{ad} A \operatorname{ad} Y+\operatorname{Tr} \operatorname{ad} X \operatorname{ad} A \operatorname{ad} Y- \\
&\quad -\operatorname{Tr} \operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y \operatorname{ad} A=0.
\end{aligned}
$$

这个性質称为 Killing 型对于內导子是不变的. 由这个性質可推出以下結論:

引理 1. 設 $\mathfrak{g}$ 是李代数, $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 令

$$\mathfrak{h}'=\{X \mid X \in \mathfrak{g} \text{ 而}(X, Y)=0, \text{对所有 } Y \in \mathfrak{h}\},$$

則 $\mathfrak{h}'$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的理想.

証. 易見 $\mathfrak{h}'$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子空間. 如 $X \in \mathfrak{h}'$ 而 $A \in \mathfrak{g}$, 則对任意 $Y \in \mathfrak{h}$, 我們有

$$([A, X], Y)=-(X,[A, Y])=0,$$

因 $[A, Y] \in \mathfrak{h}$. 所以 $[A, X] \in \mathfrak{h}'$. 这就証明了 $\mathfrak{h}'$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想.

我們再列举 Killing 型的两个性質:

4) 設 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 而 $X, Y \in \mathfrak{h}$. 以 $(X, Y)_{\mathfrak{h}}$ 表 $\mathfrak{h}$ 的 Killing 型, 則

$$(X, Y)=(X, Y)_{\mathfrak{h}}.$$

証. 在 $\mathfrak{g}$ 中选一組基

$$X_1, \cdots, X_s, X_{s+1}, \cdots, X_r,$$

使 $X_1, \cdots, X_s$ 是 $\mathfrak{h}$ 的一組基. 如 $X \in \mathfrak{h}$, 則 $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X X_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ 都是 $X_1, \cdots, X_s$ 的綫性組合, 写

$$\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X X_j=\sum_{i=1}^s x_{ij} X_i, \quad j=1, \cdots, r$$

于是 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}X$ 的矩陣有形状

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}X=\begin{pmatrix} x_{11}\cdots x_{1s}\cdots x_{1r}\\ \cdots\cdots\\ x_{s1}\cdots x_{ss}\cdots x_{sr}\\ 0\ \cdots\ 0\ \cdots\ 0\\ \cdots\cdots\\ 0\ \cdots\ 0\ \cdots\ 0\end{pmatrix}.$$

同样有

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}YX_i=\sum_{j=1}^{s}y_{ij}Y_j\,,\quad i=1,\cdots,r$$

而 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}Y$ 的矩陣

$$\mathrm{ab}_{\mathfrak{g}}Y=\begin{pmatrix} y_{11}\cdots y_{1s}\cdots y_{1r}\\ \cdots\cdots\\ y_{s1}\cdots y_{ss}\cdots y_{sr}\\ 0\ \cdots\ 0\ \cdots\ 0\\ \cdots\cdots\\ 0\ \cdots\ 0\ \cdots\ 0\end{pmatrix}.$$

注意

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}X=\begin{pmatrix} x_{11}\cdots x_{1s}\\ \cdots\cdots\\ x_{s1}\cdots x_{ss}\end{pmatrix},\quad \mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}Y=\begin{pmatrix} y_{11}\cdots y_{1s}\\ \cdots\cdots\\ y_{s1}\cdots y_{ss}\end{pmatrix},$$

所以

$$(X,Y)_{\mathfrak{h}}=\mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}X\mathrm{ad}_{\mathfrak{h}}Y=\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} x_{11}\cdots x_{1s}\\ \cdots\cdots\\ x_{s1}\cdots x_{ss}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{11}\cdots y_{1s}\\ \cdots\cdots\\ y_{s1}\cdots y_{ss}\end{pmatrix}$$

$$=\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} x_{11}\cdots x_{1s}\cdots x_{1r}\\ \cdots\cdots\\ x_{s1}\cdots x_{ss}\cdots x_{sr}\\ 0\ \cdots\ 0\ \cdots\ 0\\ \cdots\cdots\\ 0\ \cdots\ 0\ \cdots\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{11}\cdots y_{1s}\cdots y_{1r}\\ \cdots\cdots\\ y_{s1}\cdots y_{ss}\cdots y_{sr}\\ 0\ \cdots\ 0\ \cdots\ 0\\ \cdots\cdots\\ 0\ \cdots\ 0\ \cdots\ 0\end{pmatrix}=(X,Y).$$

5）$\mathfrak{g}$ 的自同构 σ 必保持 Killing 型不变，即对 $X, Y \in \mathfrak{g}$，恆有

$$(\sigma(X), \sigma(Y)) = (X, Y).$$

証. 設 $X_1, \cdots, X_r$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一組基，則 $\sigma(X_1), \cdots, \sigma(X_r)$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的一組基. 設

$$[X, X_i] = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}X_j, \quad a_{ij} \in C$$

則因 σ 为自同构，有

$$[\sigma(X), \sigma(X_i)] = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\sigma(X_j),$$

即 $\mathrm{ad}X$ 相对于基 $X_1, \cdots, X_r$ 的矩陣与 $\mathrm{ad}\sigma(X)$ 相对于基 $\sigma(X_1), \cdots, \sigma(X_r)$ 的矩陣相同. 因此

$$(\sigma(X), \sigma(Y)) = \mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}\sigma(X)\mathrm{ad}\sigma(Y) = \mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}X\mathrm{ad}Y = (X, Y).$$

E. Cartan 的另一重要結論是

"$\mathfrak{g}$ 半单当且仅当 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型非退化"，这个結果的証明将在第四章中給出.

我們来証明次之定理作为本章的結束.

定理 4. 如 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型非退化，則 $\mathfrak{g}$ 半单，并且 $\mathfrak{g}$ 是它所有的极小理想（它們本身是单代数而且个数有限）的直和，而且它們对于 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型两两正交.

証. 先証 $\mathfrak{g}$ 半单. 設 $\mathfrak{a}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个交换理想. 选 $A \in \mathfrak{a}$，那么对任意 $X, Y \in \mathfrak{g}$ 有

$$[A, [X, [A, [X, Y]]]] = 0,$$

即

$$(\mathrm{ad}A\mathrm{ad}X)^2Y = 0,$$

对任意 $X, Y \in \mathfrak{g}$. 因之 $(\mathrm{ad}A\mathrm{ad}X)^2 = 0$ 对任意 $X \in \mathfrak{g}$. 于是 $(A, X) = 0$ 对任意 $X \in \mathfrak{g}$. 由于 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型非退化，所以一定有 $A = 0$. 因之 $\mathfrak{a} = \{0\}$. 这就証明了 $\mathfrak{g}$ 沒有非 0 交换理想，即 $\mathfrak{g}$ 半单.

現在更进一步証明 $\mathfrak{g}$ 可以表成它的一些极小理想的直和. 我

們用归納法于 $\mathfrak{g}$ 的維数. 如 $\mathfrak{g}$ 是单代数, 断言自然成立. 設 $\mathfrak{g}$ 不单, 于是可設 $\mathfrak{g}$ 有一个极小理想 $\mathfrak{g}_1$. 命

$$\mathfrak{h}_1 = \{X \mid (X, Y) = 0 \text{ 对所有 } Y \in \mathfrak{g}_1\}.$$

根据引理 1, $\mathfrak{h}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 因 Killing 型非退化, 所以

$$\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{g}_1 + \dim \mathfrak{h}_1.$$

如能証明 $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{h}_1 = \{0\}$就可推出 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \dotplus \mathfrak{h}_1$. 因 $\mathfrak{g}_1$ 是极小理想, 如 $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{h}_1 \neq \{0\}$, 就一定有 $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{g}_1$, 于是 $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{h}_1$. 再由 $\mathfrak{g}_1$ 是极小理想及 $\mathfrak{g}$ 半单推出$[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] = \mathfrak{g}_1$. 因此任一 $X \in \mathfrak{g}_1$ 可表作

$$X = \sum_{i=1}^{l} [X_i, Y_i], \quad X_i, Y_i \in \mathfrak{g}_1.$$

于是对任一 $Y \in \mathfrak{g}$,

$$(X, Y) = \sum_{i=1}^{l} ([X_i, Y_i], Y) = -\sum_{i=1}^{l} (Y_i, [X_i, Y]) = 0,$$

这是因为 $Y_i \in \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{h}_1$ 而$[X_i, Y] \in \mathfrak{g}_1$. 这与 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型非退化矛盾, 因此 $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{h}_1 = \{0\}$, 所以

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \dotplus \mathfrak{h}_1.$$

我們来証明 $\mathfrak{h}_1$ 的 Killing 型 $(X, Y)_{\mathfrak{h}_1}$ 非退化. 設有 $A \in \mathfrak{h}_1$ 使 $(A, Y)_{\mathfrak{h}_1} = 0$ 对一切 $Y \in \mathfrak{h}_1$, 于是对任意 $X \in \mathfrak{g}$, 写 $X = Z + Y$, $Z \in \mathfrak{g}_1$, $Y \in \mathfrak{h}_1$, 那么

$$\begin{aligned}(A, X) &= (A, Z) + (A, Y) = (A, Y) \\ &= (A, Y)_{\mathfrak{h}_1} = 0.\end{aligned}$$

这与 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型非退化抵触, 因此 $\mathfrak{h}_1$ 的 Killing 型非退化. 由于 $\dim \mathfrak{h}_1 < \dim \mathfrak{g}$, 故根据归納法假設, $\mathfrak{h}_1$ 可表成它的一些极小理想(它們也是 $\mathfrak{g}$ 的极小理想)的直和

$$\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{g}_2 \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{g}_m.$$

于是

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \dotplus \mathfrak{g}_2 \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{g}_m.$$

最后, 我們来証明, $\mathfrak{g}_1, \cdots, \mathfrak{g}_m$ 是 $\mathfrak{g}$ 的所有的极小理想. 設 $\mathfrak{g}^*$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个极小理想. 命

$$\mathfrak{g}_i^* = \{X_i \mid X_i \in \mathfrak{g}_i \text{ 使得有 } X \in \mathfrak{g}^*,\ X = \sum_{j=1}^{m} X_j,\ X_j \in \mathfrak{g}_j\}.$$

一定有一个 i 使 $\mathfrak{g}_i^* \neq \{0\}$. 設 $\mathfrak{g}_1^* \neq 0$,于是从 $X = \sum_{i=1}^{m} X_i, X_i \in \mathfrak{g}_i$, 推出, 对任意 $Y \in \mathfrak{g}$,

$$[X, Y] = \sum_{i=1}^{m} [X_i, Y],\ [X_i, Y] \in \mathfrak{g}_i,$$

因之 $\mathfrak{g}_i^*$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想,特别 $\mathfrak{g}_1^*$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想,故 $\mathfrak{g}_1^* = \mathfrak{g}_1$. 再者,由

$$\mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] = [\mathfrak{g}_1^*, \mathfrak{g}_1] \subset [\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g}_1] \subset \mathfrak{g}^*$$

及 $\mathfrak{g}^*$ 极小,推出 $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}^*$.

最后,設 $i \neq j$, $X_i \in \mathfrak{g}_i$, $X_j \in \mathfrak{g}_j$. 对任意 $X \in \mathfrak{g}$,我們有

$$\mathrm{ad}X_i \mathrm{ad}X_j X = [X_i, [X_j, X]] \in \mathfrak{g}_i \cap \mathfrak{g}_j,$$

因此 $\mathrm{ad}X_i \mathrm{ad}X_j X = 0$, $\mathrm{ad}X_i \mathrm{ad}X_j = 0$, $(X_i, X_j) = 0$. 这就証明了 $\mathfrak{g}_1, \cdots, \mathfrak{g}_m$ 两两正交.

第二章　冪零李代数与可解李代数

§1. 預备知識

設A是作用在有限維綫性空間V上的綫性变换. V的一个子空間V_1称为在A的作用下不变，或簡称在A之下不变，如果对任意$x \in V_1$恆有$Ax \in V_1$. 如V_1在A之下不变,对任意$x \in V_1$, 定义

$$A_1x = Ax,$$

則A_1是定义在V_1上的一个綫性变换,称为A在V_1上誘导出来的綫性变换. 我們常常把A在一个不变子空間上誘导出来的綫性变换也記为A.

仍設V_1是在A之下不变的子空間. 我們可以考察商空間V/V_1. 对任意$\bar{x} \in V/V_1$, 定义

$$\bar{A}\bar{x} = \overline{Ax}.$$

这个定义与同余类$\bar{x}$的代表元的选取无关. 实际上,如$\bar{x} = \bar{y}$, 則$x - y \in V_1$, 于是$Ax - Ay \in V_1$, 因之$\overline{Ax} = \overline{Ay}$. 容易証明$\bar{A}$是定义在$V/V_1$上的綫性变换,这个变换称为$A$在商空間$V/V_1$上誘导出来的变换;如不至引起混淆,也用$A$記这个变换.

設A是作用在V上的冪零綫性变换，即有正整数m存在，使$A^m=0$. 設m是最小正整数使$A^{m-1} \neq 0$而$A^m=0$, 于是有$x \in V$, $x \neq 0$使$A^{m-1}x \neq 0$. 那么$A(A^{m-1}x) = A^m x = 0$,因此0是A的一个特征值.

如A是作用在V上的冪零綫性变换，而V_1是A的不变子空間，則A在商空間V/V_1上的誘导$\bar{A}$也冪零. 由此及冪零綫性变换一定有一个特征值为0, 再利用归納法即可証明冪零綫性变换的特征值皆为0. 反之,如一綫性变换的特征值都是0, 这个綫性变换自然冪零.

設 $\mathfrak{h}$ 是作用在綫性空間 V 上的一組綫性变換. V 的一个子空間 V_1 称为是在 $\mathfrak{h}$ 之下不变的子空間，或簡称不变子空間，如果对任意 $x \in V_1$ 及 $H \in \mathfrak{h}$ 恆有 $Hx \in V_1$. 显然 V 自身和由零向量組成的子空間 $\{0\}$ 都是 $\mathfrak{h}$ 的不变子空間；如果 V 除了这两个不变子空間之外，不再有其余的不变子空間，那么 V 就称为 $\mathfrak{h}$ 的不可約子空間，而 $\mathfrak{h}$ 称为作用在 V 上的一組不可約綫性变換.

§2. Engel 定理

引理 1. 設 X 是作用在有限維綫性空間 V 上的冪零綫性变換，即有正整数 k 存在使 $X^k = 0$. 定义从 $\mathfrak{gl}(V)$ 到 $\mathfrak{gl}(V)$ 之中的映射

$$Y \to (\mathrm{ad}\, X)Y = [X, Y], \quad Y \in \mathfrak{gl}(V),$$

則 $\mathrm{ad}\, X$ 冪零.

証. 我們有

$$(\mathrm{ad}\, X)^m Y = \sum_{i+j=m} \pm X^i Y X^j.$$

因 $X^k = 0$, 故 $(\mathrm{ad}\ X)^{2k-1} Y = 0$, 对一切 $Y \in \mathfrak{gl}(V)$. 因此 $(\mathrm{ad}\, X)^{2k-1} = 0$.

定理 1 (Engel). 設 V 是个有限維綫性空間而 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的子代数. 如 $\mathfrak{g}$ 中每个元素都是冪零綫性变換而 $V \neq \{0\}$, 則有 $x \in V$, $x \neq 0$, 使 $Xx = 0$, 对一切 $X \in \mathfrak{g}$.

証. 用归納法对 $\mathfrak{g}$ 的維数 n 来証明本定理.

如 $\mathfrak{g}$ 的維数是 0, 定理 1 自然成立.

現在設定理 1 对于維数 $< r$ 的代数成立，我們去証明它对于維数等于 r 的代数 $\mathfrak{g}$ 也成立. 首先我們来証明 $\mathfrak{g}$ 包有一个維数等于 $r-1$ 的理想 $\mathfrak{h}$.

設 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个維数 $m < r$ 的子代数. 对任一 $X \in \mathfrak{h}$, 考虑 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} X$. $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} X$ 将 $\mathfrak{g}$ 映入自身，因而誘导出 $\mathfrak{g}$ 上的一个映射 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, X$. 因 $X \in \mathfrak{h}$, 故 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X$ 的不变子空間，因此 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X$ 誘导出商空間 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 上的一个映射 $\sigma(X)$. 根据引理 1, $\mathrm{ad}_{\mathfrak{gl}(V)} X$ 冪零

对一切 $X\in\mathfrak{h}$,因此 $\sigma(X)$ 冪零对一切 $X\in\mathfrak{h}$. 又一切 $\sigma(X)(X\in\mathfrak{h})$ 組成的集 $\sigma(\mathfrak{h})$ 是 $\mathfrak{h}$ 的同态象，因而 $\sigma(\mathfrak{h})$ 是个李代数. 由于 $\dim\mathfrak{h}<r$, 故 $\dim\sigma(\mathfrak{h})<r$. 于是根据归納法假設,有 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 中非 0 元素 $Y+\mathfrak{h}$ 使 $\sigma(X)(Y+\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$ 对一切 $X\in\mathfrak{h}$. 因之 $[X, Y]\in\mathfrak{h}$ 对一切 $X\in\mathfrak{h}$. 这样 $\mathfrak{h}$ 和 Y 就生成 $\mathfrak{g}$ 的一个 $m+1$ 維的子代数,而以 $\mathfrak{h}$ 为它的理想.

根据以上討論,从 $\mathfrak{h}=\{0\}$ 出发, 即可推出 $\mathfrak{g}$ 包有一个 $r-1$維理想 $\mathfrak{h}$. 根据归納法假設,有$x\in V$, $x\neq 0$,使 $Xx=0$对一切$X\in\mathfrak{h}$. 命

$$U=\{x\,|\,x\in V,\ 而\ Xx=0,\ 对一切\ X\in\mathfrak{h}\},$$

則 $U\neq\{0\}$. 令 $A\in\mathfrak{g}$ 而 $A\notin\mathfrak{h}$, 則 U 是 A 的不变子空間. 实际上,設 $x\in U$, $X\in\mathfrak{h}$, 則

$$XAx=AXx+[X, A]x=0,$$

因 $[X, A]\in\mathfrak{h}$. 因 A 冪零, A 在 U 上誘导的綫性变换也冪零, 故有 $x\in U$, $x\neq 0$ 使 $Ax=0$. 因此 $Xx=0$ 对一切 $X\in\mathfrak{g}$.

定理 1 証毕.

系理 1. 設 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的子代数. 如 $\mathfrak{g}$ 中元素都是冪零綫性变换,則 $\mathfrak{g}$ 是冪零代数.

証. 根据定理 1, 有 $x_1\in V$, $x_1\neq 0$ 使 $Xx_1=0$, 对一切 $X\in\mathfrak{g}$. $\mathfrak{g}$ 在商空間 $V/\{x_1\}$ 上的誘导仍是个由冪零綫性变换組成的代数,因此有 $x_2\in V$, $x_2\notin\{x_1\}$ 使

$$Xx_2\equiv 0\pmod{x_1}.$$

如此継續下去,可求得 V 的一組基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 具有性质

$$Xx_i\equiv 0\pmod{x_1, \cdots, x_{i-1}},$$

对所有 $X\in\mathfrak{g}$. 即,对于这組基, $\mathfrak{g}$ 中元素的矩陣皆取形状

$$\begin{pmatrix} 0 & x_{12} & \cdots & \cdots & x_{1n} \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & x_{n-1\,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

于是 $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{n}(n, c)$. 因此 $\mathfrak{g}$ 冪零.

系理 2 (Engel). 李代数 $\mathfrak{g}$ 冪零,当且仅当对任意 $X\in\mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}\,X$ 都是冪零.

証. 如 $\mathfrak{g}$ 冪零,則有正整数 m 存在,使

$$[X_m, [\cdots[X_2, X_1]\cdots]] = 0$$

对任意 m 个 $X_1, X_2, \cdots, X_m\in\mathfrak{g}$ 都成立. 特别

$$\underbrace{[X,[\cdots[X}_{m-1\text{个}}, Y]\cdots]] = 0$$

对任意 $X, Y\in\mathfrak{g}$ 都成立,卽对任意 $X, Y\in\mathfrak{g}$, $(\mathrm{ad}\,X)^{m-1}Y = 0$. 因之对任意 $X\in\mathfrak{g}$, $(\mathrm{ad}\,X)^{m-1} = 0$.

反之,設 $\mathrm{ad}\,X$ $(X\in\mathfrak{g})$ 皆冪零. 注意 $\mathrm{ad}\,X$ 都是作用在 $\mathfrak{g}$ 上的綫性变換,根据 Engel 定理,有 $X_1\in\mathfrak{g}$, $X_1\neq 0$, 使 $(\mathrm{ad}\,X)X_1 = 0$ 对一切 $X\in\mathfrak{g}$. 因此 $\mathfrak{g}$ 的中心 $\mathfrak{c}\neq\{0\}$, 令 $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}/\mathfrak{c}$. 如 $\bar{X}\in\bar{\mathfrak{g}}$, 則 $\mathrm{ad}_{\bar{\mathfrak{g}}}\bar{X}$ 也冪零. 实际上,如 $(\mathrm{ad}\,X)^m = 0$; 卽

$$\underbrace{[X,[\cdots[X}_{m}, Y]\cdots]] = 0$$

对任意 $Y\in\mathfrak{g}$, 則

$$\underbrace{[\bar{X},[\cdots[\bar{X}}_{m}, \bar{Y}]\cdots]] = 0$$

对一切 $\bar{Y}\in\bar{\mathfrak{g}}$, 卽 $(\mathrm{ad}\,\bar{X})^m = 0$. 将归納法应用于 $\mathfrak{g}$ 的維数,由于 $\bar{\mathfrak{g}}$ 的維数小于 $\mathfrak{g}$ 的維数,故 $\bar{\mathfrak{g}}$ 冪零,卽有正整数 m 存在使

$$[\bar{X}_m, [\cdots[\bar{X}_2, \bar{X}_1]\cdots]] = 0$$

对任意 m 个 $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \cdots, \bar{X}_m\in\mathfrak{g}$ 成立;亦卽

$$[X_m, [\cdots[X_2, X_1]\cdots]]\in\mathfrak{c}$$

对任意 m 个 $X_1, X_2, \cdots, X_m\in\mathfrak{g}$ 成立. 因之

$$[X_{m+1}, [X_m, [\cdots[X_2, X_1]\cdots]]] = 0$$

对任意 $m+1$ 个 $X_1, X_2, \cdots, X_{m+1}\in\mathfrak{g}$ 成立,所以 $\mathfrak{g}$ 冪零.

§3. Lie 定理

引理 2. 設 V 是有限維綫性空間, 而 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的子代数, $\mathfrak{n}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个理想. 再設 $\varphi(A)$ 是定义在 $\mathfrak{n}$ 上取复数值的綫性函

数，如果命
$$K=\{x|x\in V,\text{对一切 }A\in\mathfrak{n},\text{有 }Ax=\varphi(A)x\},$$
则K是 $\mathfrak{g}$ 的不变子空間.

証. 設 $A\in\mathfrak{n}$, $X\in\mathfrak{g}$, $x\in K$, 则
$$AXx=[A,X]x+XAx=\varphi([A,X])x+\varphi(A)Xx. \quad (1)$$
如 $K=\{0\}$, 引理 2 自然成立. 如果 $K\neq\{0\}$, 我們将証明 $\varphi([A,X])=0$, 这时K在 $\mathfrak{g}$ 的作用下的不变性即由(1)式推出.

选 $x\in K$, $x\neq 0$. 定义 $x_k=X^kx$. 因V是有限維的，所以有非負整数 p 使 $x_0, x_1, \cdots, x_p$ 綫性无关而 $x_0, x_1, \cdots, x_{p+1}$ 綫性相关. 于是由 $x_0, x_1, \cdots, x_p$ 生成的綫性子空間W是X的不变子空間. 我們用归納法来証明：对任意 $A\in\mathfrak{n}$,
$$Ax_q\equiv\varphi(A)x_q\ (\mathrm{mod}\ x_0, x_1, \cdots, x_{q-1}). \quad (2)$$
实际上，当 $q=0$ 时，(2)式自然成立. 現在設(2)式对 q 成立，则
$$\begin{aligned}Ax_{q+1}&=AXx_q=[A,X]x_q+XAx_q\\&\equiv\varphi([A,X])x_q+X\varphi(A)x_q\\&\quad(\mathrm{mod}\ x_0, x_1, \cdots, x_{q-1}, Xx_0, \cdots, Xx_{q-1})\\&\equiv\varphi(A)x_{q+1}\ (\mathrm{mod}\ x_0, x_1, \cdots, x_q).\end{aligned}$$
因此(2)式对 $q+1$ 也成立. 这样W也是 $\mathfrak{n}$ 的不变子空間.

既然W是X和 $\mathfrak{n}$ 的不变子空間，可以計算 $\mathrm{Tr}_W(A)$, $A\in\mathfrak{n}$,
$$\mathrm{Tr}_W(A)=(p+1)\varphi(A).$$
因 $\mathfrak{n}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想，故 $[A,X]\in\mathfrak{n}$ 对任意 $A\in\mathfrak{n}$. 将 $[A,X]$ 代入上式即得
$$\mathrm{Tr}_W([A,X])=(p+1)\varphi([A,X]). \quad (3)$$
另一方面
$$\mathrm{Tr}_W([A,X])=\mathrm{Tr}_WAX-\mathrm{Tr}_WXA=0, \quad (4)$$
于是由 (3), (4) 两式推出 $\varphi([A,X])=0$.

定理 2 (Lie). 設 $\mathfrak{g}$ 是作用在有限維綫性空間V上的可解綫性李代数，则V中有非 0 向量 x 存在，使 $Xx=\varphi(X)x$ 对一切 $X\in\mathfrak{g}$, 即 x 是 $\mathfrak{g}$ 中一切綫性变换的公共特征向量.

証．对 $\mathfrak{g}$ 的維数 r 用归納法．$\dim\mathfrak{g}=0$ 时，定理自然成立．今假設定理 1 对于維数小于 r 的代数已經成立．因 $\mathfrak{g}$ 可解，$\mathscr{D}\mathfrak{g}\neq\mathfrak{g}$．位于 $\mathfrak{g}$ 与 $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ 之間的任一子空間都是 $\mathfrak{g}$ 的理想，因此 $\mathfrak{g}$ 有 $r-1$ 維理想 $\mathfrak{n}$，而 $\mathfrak{g}$ 由 $\mathfrak{n}$ 和一个元素 $X\notin\mathfrak{n}$ 的綫性組合組成．

自然 $\mathfrak{n}$ 可解．根据归納法假設有 $x\in V$，$x\neq 0$，使

$$Ax=\varphi(A)x$$

对一切 $A\in\mathfrak{n}$ 成立．显然 $\varphi(A)$ 是定义在 $\mathfrak{n}$ 上的綫性函数．命

$$K=\{x\,|\,x\in V,\ \text{对一切}\ A\in\mathfrak{n},\ Ax=\varphi(A)x\},$$

則 $K\neq\{0\}$．根据引理 2，K 是 $\mathfrak{g}$ 的不变子空間；特别 K 是 X 的不变子空間．于是可在 K 中求得 X 的一个非 0 特征向量，它即是 $\mathfrak{g}$ 中一切綫性变換的公共特征向量．

系理 1. 設 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的可解子代数，則可在 V 中选取一組基使 $\mathfrak{g}$ 中元素的矩陣皆具形状

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots\cdots & x_{1n} \\ 0 & x_{22} & \cdots\cdots & x_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & x_{nn} \end{pmatrix},$$

即綫性可解代数一定是 $\mathfrak{t}(n,C)$ 的子代数．

証．可仿定理 1 的系理 1 的証明証之．

系理 2. 設 $\mathfrak{g}$ 是李代数．$\mathfrak{g}$ 可解当且仅当 $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ 幂零．

証．如 $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ 幂零，則 $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ 可解，因此 $\mathfrak{g}$ 可解．

反之，設 $\mathfrak{g}$ 可解，考察 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}X\ (X\in\mathfrak{g})$．命

$$\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{g}=\{\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}X\,|\,X\in\mathfrak{g}\},$$

則 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{g}$ 作为 $\mathfrak{g}$ 的同态象是可解綫性代数．根据系理 1，可在 $\mathfrak{g}$ 中找到一組基使 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}X(X\in\mathfrak{g})$ 的矩陣皆取形状

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots\cdots & x_{1r} \\ 0 & x_{22} & \cdots\cdots & x_{2r} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & x_{rr} \end{pmatrix}.$$

那么 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} X$, $X \in \mathscr{D}\mathfrak{g}$, 就都是冪零矩陣. 于是 $\mathrm{ad}_{\mathscr{D}\mathfrak{g}} X$, $X \in \mathfrak{D}\mathfrak{g}$ 也都冪零. 根据定理 1 的系理 2, $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ 冪零.

系理 3. 設 $\mathfrak{g}$ 是作用在綫性空間 V 上的不可約綫性李代数. 如 $\mathfrak{n}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的可解理想, 則 $\mathfrak{n}$ 中綫性变換皆有形式 φI, I 是单位变換.

証. 根据 Lie 定理, 有 $x \in V$, $x \neq 0$ 使

$$Ax = \varphi(A)x,$$

对一切 $A \in \mathfrak{n}$. 命

$$K = \{x \mid x \in V,\ 对一切\ A \in \mathfrak{n},\ 有\ Ax = \varphi(A)x\},$$

則 $K \neq \{0\}$. 根据引理 2, K 是 $\mathfrak{g}$ 的不变子空間. 因 $\mathfrak{g}$ 是不可約的, 故 $K = V$. 因此 $A = \varphi(A)I$ 对任意 $A \in \mathfrak{n}$ 成立.

由于 $\mathfrak{gl}(n, C)$ 和 A_{n-1} 都是不可約的, 所以作为这个系理的一个应用, 可以推出 $\mathfrak{gl}(n, C)$ 中唯一的一个非 0 可解理想是由純量矩陣組成的子代数, 而 A_{n-1} 沒有非零可解理想, 因而是半单的.

类似地, 利用系理 3 也可証明 $B_n(n \geqslant 1)$, $C_n(n \geqslant 1)$ 和 $D_n(n \geqslant 2)$ 都是半单的.

§4. 冪零綫性代数

引理 3. 設 A 是作用在有限維綫性空間 V 上的一个綫性变換, λ 是复数. 命

$$V_A^\lambda = \{v \mid v \in V,\ 并存在正整数\ n\ 使\ (A - \lambda I)^n v = 0\},$$

則

1° V_A^λ 是在 A 作用下不变的子空間.

2° $V_A^\lambda \neq \{0\}$ 当且仅当 λ 是 A 的特征值，而且，如果 $V_A^\lambda \neq \{0\}$，則 A 在 V_A^λ 中只有 λ 这个特征值.

3° 如 $V_A^\lambda \neq \{0\}$，則对一切 $v \in V_A^\lambda$，有 $(A-\lambda I)^{\dim V_A^\lambda} v = 0$.

4° A 的特征值 λ 的重数等于 $\dim V_A^\lambda$.

5° $V = \sum_{\lambda \in \Delta}^{\cdot} V_A^\lambda$（直和），$\Delta$ 是 A 的不同特征值的全体.

証. 第一个断言是明显的，现在来証第二个断言成立. 如 λ 为 A 的特征值，就有 $v \in V$，$v \neq 0$ 使 $(A-\lambda I)v=0$. 于是 $v \in V_A^\lambda$，因之 $V_A^\lambda \neq \{0\}$. 反之，設 $V_A^\lambda \neq \{0\}$，并設 μ 是 A 在 V_A^λ 中的一个特征值，卽有 $v \in V_A^\lambda$，$v \neq 0$，使 $(A-\mu I)v = 0$，卽 $Av = \mu v$. 另一方面，由 V_A^λ 的定义知有正整数 n 存在使 $(A-\lambda I)^n v = 0$；将 $Av = \mu v$ 代入这个式子就有 $(\mu - \lambda)^n v = 0$，因此 $\mu = \lambda$.

注意到任一矩陣皆可在相似变換之下化为上三角形这一事实以及第二个断言，故知可在 V_A^λ 中选取一組基使 A 在 V_A^λ 中誘导的綫性变換对于这組基的矩陣是

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & * & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \lambda \end{pmatrix},$$

由此卽推出第三个断言.

为要証第四个断言，首先注意：如 W 为 V 的子空間，在 A 的作用下不变，則 A 的特征值 λ 的重数等于 λ 作为 A 在 W 中誘导的綫性变換 A_W 的特征值的重数与 λ 作为 A 在 V/W 上誘导的綫性变換 $A_{V/W}$ 的特征值的重数之和. 因此只要証明 A_{V/V_A^λ} 不再以 λ 为特征值卽可. 否則，設有 $v \in V$ 而 $v \notin V_A^\lambda$ 具有性质 $Av \equiv \lambda v \pmod{V_A^\lambda}$，卽 $(A-\lambda I)v \equiv 0 \pmod{V_A^\lambda}$. 由 3) 知

$$(A-\lambda I)^{\dim V_A^\lambda + 1} v = 0,$$

于是 $v \in V_A^\lambda$ 与假設相违.

最后証第五个断言. 設 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 是 A 的所有不同的特征

値. 先証 $\sum_{i=1}^{s} {}^{\cdot} V_A^{\lambda_i}$ 是直和. 設有关系式

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_s = 0, \quad v_i \in V_A^{\lambda_i}. \tag{1}$$

将

$$f_k(A) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{s} (A - \lambda_i I)^{\dim V_A^{\lambda_i}}, \quad k = 1, 2, \cdots, s$$

作用在(1)式双方,根据 3° 我們有

$$f_k(A) v_k = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, s; \tag{2}$$

另一方面我們有

$$(A - \lambda_k I)^{\dim V_A^{\lambda_k}} v_k = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, s. \tag{3}$$

由于 $f_k(\lambda)$ 与 $(\lambda - \lambda_k)^{\dim V_A^{\lambda_k}}$ 互素,故有 λ 的多項式 $p_k(\lambda)$ 和 $q_k(\lambda)$ 存在,使

$$p_k(\lambda) f_k(\lambda) + q_k(\lambda)(\lambda - \lambda_k)^{\dim V_A^{\lambda_k}} = 1.$$

将 A 代入上式就有

$$p_k(A) f_k(A) + q_k(A)(A - \lambda_k I)^{\dim V_A^{\lambda_k}} = I.$$

将这个式子的双方作用在 v_k 之上,注意到(2)和(3)式,就有

$$0 = v_k, \quad k = 1, 2, \cdots, s.$$

这就証明了 $\sum_{i=1}^{s} {}^{\cdot} V_A^{\lambda_i}$ 是直和.

再来証 $V = \sum_{i=1}^{s} {}^{\cdot} V_A^{\lambda_i}$. 設 λ_i 的重数是 n_i, 則 $\dim V = n_1 + n_2 + \cdots + n_s$. 但根据 4°, $\dim V_A^{\lambda_i} = n_i$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$. 因此 $V = \sum_{i=1}^{s} {}^{\cdot} V_A^{\lambda_i}$. 引理 3 至此完全証毕.

引理 4. 設 A 和 B 是作用在綫性空間 V 上的綫性变换且适合关系

$$[A, \cdots [A, [A, B]] \cdots] = 0,$$

則子空間 V_A^{λ} 在 B 的作用下不变.

証. 設

$$\underbrace{[A,\cdots[A,}_{k}[A,B]]\cdots]=0,$$

我們用归納法向 k 来証明本引理. 首先,当 $k=0$ 时,引理中的断言自然成立. 今設引理对于 $k-1$ 成立. 令 $C=[A,B]$, 则

$$\underbrace{[A,\cdots[A,}_{k-1}[A,C]]\cdots]=0.$$

根据归納法假設, V_A^λ 在 C 的作用下不变.

我們有 $(A-\lambda I)B=B(A-\lambda I)+[A,B]$. 用归納法可証

$$(A-\lambda I)^n B=B(A-\lambda I)^n + \sum_{s=0}^{n-1}(A-\lambda I)^{n-s-1}[A,B](A-\lambda I)^s. \qquad (4)$$

实际上,設(4)式对 n 成立,则

$$(A-\lambda I)^{n+1}B=B(A-\lambda I)^{n+1}+[A,B](A-\lambda I)^n + \sum_{s=0}^{n-1}(A-\lambda I)^{n-s}[A,B](A-\lambda I)^s$$

$$=B(A-\lambda I)^{n+1}+\sum_{s=0}^{n}(A-\lambda I)^{n-s}[A,B](A-\lambda I)^s.$$

因此(4)式对 $n+1$ 也成立. 在(4)式中取 $n=2\dim V_A^\lambda$,并将(4)式双方作用在 $v\in V_A^\lambda$ 之上,就有

$$(A-\lambda I)^n Bv=B(A-\lambda I)^n v + \sum_{s=0}^{n-1}(A-\lambda I)^{n-s-1}[A,B](A-\lambda I)^s v.$$

自然有

$$(A-\lambda I)^n v=0.$$

如 $s\geqslant\dim V_A^\lambda$, 则

$$(A-\lambda I)^s v=0.$$

如 $s<\dim V_A^\lambda$, 则 $n-s-1\geqslant\dim V_A^\lambda$. 根据归納法假設, $[A,B](A-\lambda I)^s v=C(A-\lambda I)^s v\in V_A^\lambda$, 因此

$$(A-\lambda I)^{n-s-1}[A, B](A-\lambda I)^{s}v=0.$$

这就証明了

$$(A-\lambda I)^{n}Bv=0,$$

即 $Bv\in V_A^{\lambda}$.

現在設 $\mathfrak{h}$ 是作用在綫性空間 V 上的一个綫性李代数，即 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的子代数. 定义在 $\mathfrak{h}$ 上的一个取复数值的函数 $\varphi(H)$, $(H\in\mathfrak{h})$, 称为是 $\mathfrak{h}$ 的一个权，如果 V 中有一个不等于 0 的向量 v 存在，使

$$Hv=\varphi(H)v \quad 对一切 H\in\mathfrak{h},$$

而 v 称为相应于权 φ 的权向量.

根据 Lie 定理，可解綫性李代数，特别是冪零綫性李代数，一定有一个权.

定理 3. 設 $\mathfrak{h}$ 是作用在空間 V 上的冪零綫性李代数. 如 $\varphi(H)$ 是定义在 $\mathfrak{h}$ 上的一个取复数值的綫性函数. 命

$V_{\mathfrak{h}}^{\varphi}=\{v\,|\,v\in V$, 存在正整数 n, 使 $(H-\varphi(H)I)^{n}v=0$ 对一切 $H\in\mathfrak{h}\}$，称为权 φ 的权子空間，則

1) $V_{\mathfrak{h}}^{\varphi}=\bigcap\limits_{A\in\mathfrak{h}}V_A^{\varphi(A)}$, 而且 $V_{\mathfrak{h}}^{\varphi}$ 是 $\mathfrak{h}$ 的不变子空間.

2) $V_{\mathfrak{h}}^{\varphi}\neq 0$, 当且仅当 φ 是 $\mathfrak{h}$ 的一个权，而且 $\mathfrak{h}$ 在 $V_{\mathfrak{h}}^{\varphi}$ 中只有 φ 这一个权.

3) 如 $V_{\mathfrak{h}}^{\varphi}\neq 0$, 則 $(H-\varphi(H)I)^{\dim V_{\mathfrak{h}}^{\varphi}}v=0$ 对一切 $H\in\mathfrak{h}$, $v\in V_{\mathfrak{h}}^{\varphi}$.

4) $V=\sum\limits_{\varphi\in\Delta}^{\cdot}V_{\mathfrak{h}}^{\varphi}$, Δ 是 $\mathfrak{h}$ 的权的集合.

証. 显然，$V_{\mathfrak{h}}^{\varphi}\subset\bigcap\limits_{A\in\mathfrak{h}}V_A^{\varphi(A)}$. 設 $V'=\bigcap\limits_{A\in\mathfrak{h}}V_A^{\varphi(A)}$, 对任一 $B\in\mathfrak{h}$, 因 $\mathfrak{h}$ 是冪零代数，故有正整数 m 存在，使 $(\mathrm{ad}\,A)^{m}B==0$. 于是根据引理 4, $V_A^{\varphi(A)}$ 在任一 $B\in\mathfrak{h}$ 的作用下皆不变. 于是 V' 是 $\mathfrak{h}$ 的不变子空間. $\mathfrak{h}$ 在 V' 上的誘导仍是个冪零代数，因而可解. 根据 Lie 定理，可在 V' 上选一組基，使 $A\in\mathfrak{h}$ 的矩陣皆上三

角形而主对角綫上为 $\varphi_1(A), \cdots, \varphi_s(A)$ $(s = \dim V')$. 因 $V' = \bigcap_{A \in \mathfrak{h}} V_A^{\varphi(A)}$, 故 $\varphi(A) = \varphi_1(A) = \cdots = \varphi_s(A)$. 因此 $V' \subset V_{\mathfrak{h}}^{\varphi}$. 故

$$V_{\mathfrak{h}}^{\varphi} = \bigcap_{A \in \mathfrak{h}} V_A^{\varphi(A)}.$$

再从 $V_{\mathfrak{h}}^{\varphi} = \bigcap_{A \in \mathfrak{h}} V_A^{\varphi(A)}$, 即可推出 $V_{\mathfrak{h}}^{\varphi}$ 在 $\mathfrak{h}$ 的作用下不变.

第二个断言的証明与引理 3 中第二个断言的証明相同, 因而略去.

第三个断言是 φ 是 $\mathfrak{h}$ 在 $V_{\mathfrak{h}}^{\varphi}$ 中仅有的权及 Lie 定理的系理 1 的推論.

現在来証明第四个断言. 对 V 的維数用归納法. 如果所有的 H 都只有一个特征値 $\varphi(H)$, 根据 Lie 定理, $\varphi(H)$ 是 $\mathfrak{h}$ 的一个权, 于是 $V = V_{\mathfrak{h}}^{\varphi}$. 如有一个 $H \in \mathfrak{h}$, 它有两个以上的不同的特征値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ $(s \geqslant 2)$, 則根据引理 3 中的 4) 知 $V = \sum_{i=1}^{s}{}^{\cdot} V_H^{\lambda_i}$. 因 $V_H^{\lambda_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$ 都是 $\mathfrak{h}$ 的不变子空間, 而 $V_H^{\lambda_i}$ 的維数小于 V 的維数, 根据归納法假設

$$V_H^{\lambda_i} = \sum_{\varphi \in \Delta_i}{}^{\cdot} V_{\mathfrak{h}}^{\varphi},$$

Δ_i 是 $\mathfrak{h}$ 在 $V_H^{\lambda_i}$ 中所有的权. 因 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 两两不同, 故 $\Delta_1, \cdots, \Delta_s$ 中沒有相同的权. 于是令 $\Delta = \Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_s$, 則

$$V = \sum_{\varphi \in \Delta}{}^{\cdot} V_{\mathfrak{h}}^{\varphi}.$$

系理 1. 設 $\mathfrak{h}$ 是作用在 n 維空間 V 上的冪零綫性李代数. 可以在 V 中选取一組基, 使 $\mathfrak{h}$ 成为某一个 $\mathfrak{n}(n_1, C) \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{n}(n_m, C)$ $(n = n_1 + \cdots n_m$ 是 n 的一个分拆)的子代数, m 是 $\mathfrak{h}$ 的不同的权的个数.

証. 設 $\varphi_1, \cdots, \varphi_m$ 是 $\mathfrak{h}$ 的所有不同的权, 并設 $\dim V_{\mathfrak{h}}^{\varphi_i} = n_i$. $\mathfrak{h}$ 在 $V_{\mathfrak{h}}^{\varphi_i}$ 中誘导出来的代数 $\mathfrak{h}_i$ 是 $\mathfrak{h}$ 的同态象, 因而是冪零

的．根据 Lie 定理的系理 1，可在 $V_{\mathfrak{h}}^{\varphi_i}$ 中选一組基，使 $\mathfrak{h}_i$ 中矩陣 H 皆有形状

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(i)} & \cdots & a_{1m_i}^{(i)} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{m_im_i}^{(i)} \end{pmatrix},$$

而 $a_{11}^{(i)}=\cdots=a_{m_im_i}^{(i)}=\varphi_i(H)$．由此即可推出系理 1．

系理 2. 設 $\mathfrak{h}$ 是作用在綫性空間 V 上的冪零綫性李代数，$\varphi_1, \cdots, \varphi_m$ 是 $\mathfrak{h}$ 的权的集合．如 $H \in \mathscr{D}\mathfrak{h}$，則

$$\varphi_1(H)=\cdots=\varphi_m(H)=0.$$

第三章　Cartan 子代数

§1. Cartan 子代数

設 $\mathfrak{g}$ 是李代数，$\mathfrak{h}$ 是它的一个冪零子代数. 綫性变换 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} H$ $(H\in\mathfrak{h})$ 的全体組成一个作用在空間 $\mathfrak{g}$ 上的冪零綫性代数. 这个代数用 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{h}$ 来表示，簡記为 $\mathrm{ad}\mathfrak{h}$. 根据第二章定理 3，$\mathfrak{g}$ 有直和分解

$$\mathfrak{g}=\sum_{\varphi\in\Delta}\mathfrak{g}^{\varphi}_{\mathrm{ad}\mathfrak{h}},$$

其中 Δ 是 $\mathrm{ad}\mathfrak{h}$ 的权的集合，簡称 $\mathfrak{h}$ 的权的集合. 关于这个分解式，有以下三个簡单性質：

1）$[\mathfrak{g}^{\alpha}_{\mathrm{ad}\mathfrak{h}},\ \mathfrak{g}^{\beta}_{\mathrm{ad}\mathfrak{h}}]\subset\mathfrak{g}^{\alpha+\beta}_{\mathrm{ad}\mathfrak{h}}$ 对 $\alpha,\beta\in\Delta$. 特别，$\mathfrak{g}^{0}_{\mathrm{ad}\mathfrak{h}}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的子代数；而且如 $\alpha+\beta\notin\Delta$，則

$$[\mathfrak{g}^{\alpha}_{\mathrm{ad}\mathfrak{h}},\ \mathfrak{g}^{\beta}_{\mathrm{ad}\mathfrak{h}}]=0.$$

証. 我們有公式

$$(\mathrm{ad}\,H-\alpha(H)I-\beta(H)I)[X,Y]=$$
$$=[(\mathrm{ad}\,H-\alpha(H)I)X,Y]+[X,(\mathrm{ad}\,H-\beta(H)I)Y],$$

于是用归納法可証

$$(\mathrm{ad}\,H-\alpha(H)I-\beta(H)I)^{k}[X,Y]=$$
$$=\sum_{s=0}^{k}C_s^k[(\mathrm{ad}\,H-\alpha(H)I)^{s}X,(\mathrm{ad}\,H-\beta(H)I)^{k-s}Y],$$

其中 C_s^k 是二項式系数. 如 $X\in\mathfrak{g}^{\alpha}_{\mathrm{ad}\mathfrak{h}}$，$Y\in\mathfrak{g}^{\beta}_{\mathrm{ad}\mathfrak{h}}$，則对相当大的 k，上式右側为 0，因之 $[X,Y]\in\mathfrak{g}^{\alpha+\beta}_{\mathrm{ad}\mathfrak{h}}$.

2）$(\mathfrak{g}^{\alpha}_{\mathrm{ad}\mathfrak{h}},\mathfrak{g}^{\beta}_{\mathrm{ad}\mathfrak{h}})=0$，如 $\alpha+\beta\neq0$.

証. 从 $\mathfrak{g}^{\alpha}_{\mathrm{ad}\mathfrak{h}}$ 中各取出一組基，这些基湊在一起就构成 $\mathfrak{g}$ 的一組基. 設 $X\in\mathfrak{g}^{\alpha}_{\mathrm{ad}\mathfrak{h}}$，$Y\in\mathfrak{g}^{\beta}_{\mathrm{ad}\mathfrak{h}}$，則根据 1)，就有

$$\operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y\, \mathfrak{g}_{\operatorname{ad}\mathfrak{h}}^{\varphi} \subset \mathfrak{g}_{\operatorname{ad}\mathfrak{h}}^{\varphi+\alpha+\beta}.$$

因此对于上面选的那組基来說，ad X ad Y 的对角綫元素都是 0，因此

$$(X, Y) = \operatorname{Tr} \operatorname{ad} X \operatorname{ad} Y = 0.$$

3) $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_{\operatorname{ad}\mathfrak{h}}^{0}$.

証. 設 $H \in \mathfrak{h}$. 因 $\mathfrak{h}$ 冪零，故有一正整数 m 存在，使 $(\operatorname{ad} A)^m H = 0$，对一切 $A \in \mathfrak{h}$. 这就是說 $H \in \mathfrak{g}_{\operatorname{ad}\mathfrak{h}}^{0}$.

我們定义：如 $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{\operatorname{ad}\mathfrak{h}}^{0}$，則 $\mathfrak{h}$ 就称为 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数，而(1)就称为 $\mathfrak{g}$ 对于 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的 Cartan 分解，Δ 除去 0 之后称为 $\mathfrak{g}$ 对于 $\mathfrak{h}$ 的根的集合或簡称 $\mathfrak{g}$ 的根的集合，記作 Σ. 如 φ 是根，$\mathfrak{g}_{\operatorname{ad}\mathfrak{h}}^{\varphi}$ 称为相应于根 φ 的根子空間.

显而易見，$\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 一定包含 $\mathfrak{g}$ 的中心 $\mathfrak{c}$. 实际上，設 $X \in \mathfrak{c}$，則 $[H, X] = 0$ 对一切 $H \in \mathfrak{h}$，即 ad $HX = 0$ 对一切 $H \in \mathfrak{h}$. 因之 $X \in \mathfrak{h}_{\operatorname{ad}\mathfrak{h}}^{0} = \mathfrak{h}$.

定理 1. $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 是个极大冪零子代数.

証. 設 $\mathfrak{h}'$ 是 $\mathfrak{g}$ 的冪零子代数，而 $\mathfrak{h}' \supset \mathfrak{h}$. 因 $\mathfrak{h}'$ 冪零，有正整数 m 存在使

$$[H'_m, \cdots [H'_3, [H'_2, H'_1]] \cdots] = 0,$$

对任意 m 个元素 $H'_1, \cdots, H'_m \in \mathfrak{h}'$. 特别

$$\underbrace{[H, \cdots [H,}_{m-1} [H, H'] \cdots]] = 0,$$

对任意 $H \in \mathfrak{h}$ 及 $H' \in \mathfrak{h}'$. 即 $(\operatorname{ad} H)^{m-1} H' = 0$ 对任意 $H \in \mathfrak{h}$ 及 $H' \in \mathfrak{h}'$. 因之 $H' \in \mathfrak{g}_{\operatorname{ad}\mathfrak{h}}^{0} = \mathfrak{h}$ 对任意 $H' \in \mathfrak{h}'$. 所以 $\mathfrak{h}' \subset \mathfrak{h}$，于是 $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}$.

定理 2. 設 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \dotplus \mathfrak{g}_2$，則 $\mathfrak{g}_1$ 的一个 Cartan 子代数与 $\mathfrak{g}_2$ 的一个 Cartan 子代数的直和一定是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数. 反之，$\mathfrak{g}$ 的任一 Cartan 子代数一定是 $\mathfrak{g}_1$ 的一个 Cartan 子代数与 $\mathfrak{g}_2$ 的一个 Cartan 子代数的直和.

証. 設 $\mathfrak{h}_i$ 是 $\mathfrak{g}_i$ 的一个 Cartan 子代数 $(i = 1, 2)$，我們有

$$\mathfrak{g}_{i\,\mathrm{ad}\mathfrak{h}_i}^{0} = \mathfrak{h}_i, \quad i = 1, 2.$$

令 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \dot{+} \mathfrak{h}_2$. 因 $\mathfrak{h}_1$ 和 $\mathfrak{h}_2$ 是冪零的，故 $\mathfrak{h}_1 \dot{+} \mathfrak{h}_2$ 也冪零. 現在来証明

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}\mathfrak{h}}^{0} = \mathfrak{h}.$$

設 $X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}\mathfrak{h}}^{0}$，卽有正整数 m 使 $(\mathrm{ad}\, H)^m X = 0$，对一切 $H \in \mathfrak{h}$，写 $X = X_1 + X_2$, $X_i \in \mathfrak{g}_i$, $H = H_1 + H_2$, $H_i \in \mathfrak{h}_i$，則由

$$(\mathrm{ad}\, H)^m X = (\mathrm{ad}\, H_1)^m X_1 + (\mathrm{ad}\, H_2)^m X_2 = 0$$

推出

$$(\mathrm{ad}\, H_1)^m X_1 = (\mathrm{ad}\, H_2)^m X_2 = 0,$$

对一切 $H_1 \in \mathfrak{h}_1$, $H_2 \in \mathfrak{h}_2$. 因此 $X_i \in \mathfrak{g}_{i\,\mathrm{ad}\mathfrak{h}_i}^{0} = \mathfrak{h}_i (i = 1, 2)$. 由此卽推出

$$X = X_1 + X_2 \in \mathfrak{h}_1 \dot{+} \mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}.$$

反之，設 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数，卽

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}\mathfrak{h}}^{0} = \mathfrak{h}.$$

令

$$\mathfrak{h}_1 = \{H_1 | H_1 \in \mathfrak{g}_1 \text{ 而有 } H \in \mathfrak{h} \text{ 使 } H = H_1 + H_2, H_2 \in \mathfrak{g}_2\},$$
$$\mathfrak{h}_2 = \{H_2 | H_2 \in \mathfrak{g}_2 \text{ 而有 } H \in \mathfrak{h} \text{ 使 } H = H_1 + H_2, H_1 \in \mathfrak{g}_1\},$$

自然 $\mathfrak{h}_i$ 是 $\mathfrak{g}_i$ 的子代数 $(i = 1, 2)$. 我們来証明 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \dot{+} \mathfrak{h}_2$. 設 $H_1 \in \mathfrak{h}_1$，于是有 $H \in \mathfrak{h}$ 使 $H = H_1 + H_2$, $H_2 \in \mathfrak{g}_2$. 对任一 $H' \in \mathfrak{h}$，有正整数 m 存在使 $(\mathrm{ad}\, H')^m H = 0$，但由

$$(\mathrm{ad}\, H')^m H = (\mathrm{ad}\, H')^m H_1 + (\mathrm{ad}\, H')^m H_2 = 0$$

及 $(\mathrm{ad}\, H')^m H_i \in \mathfrak{g}_i (i = 1, 2)$，推出 $(\mathrm{ad}\, H')^m H_1 = 0$. 因此 $H_1 \in \mathfrak{h}$，于是 $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}$. 同理可証 $\mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{h}$. 另一方面，設 $H \in \mathfrak{h}$，写 $H = H_1 + H_2$, $H_1 \in \mathfrak{g}_1$, $H_2 \in \mathfrak{g}_2$，則 $H_1 \in \mathfrak{h}_1$, $H_2 \in \mathfrak{h}_2$. 因此 $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \dot{+} \mathfrak{h}_2$. 因 $\mathfrak{h}$ 冪零，故 $\mathfrak{h}_1$ 和 $\mathfrak{h}_2$ 皆冪零. 設 $X_1 \in \mathfrak{g}_{1\,\mathrm{ad}\mathfrak{h}_1}^{0}$，卽对任意 $H_1 \in \mathfrak{h}_1$ 有正整数 m 存在使 $(\mathrm{ad}\, H_1)^m X_1 = 0$. 設 $H \in \mathfrak{h}$，写 $H = H_1 + H_2$, $H_i \in \mathfrak{h}_i$，則 $(\mathrm{ad}\, H)^m X_1 = (\mathrm{ad}\, H_1)^m X_1 = 0$. 因此 $X_1 \in \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}\mathfrak{h}}^{0} = \mathfrak{h}$. 于是 $X \in \mathfrak{h}_1$. 这就証明了 $\mathfrak{h}_1$ 是 $\mathfrak{g}_1$ 的 Cartan 子代数. 同理可証 $\mathfrak{h}_2$ 是 $\mathfrak{g}_2$ 的 Cartan 子代数.

我們举出典型李代数的 Cartan 子代数与 Cartan 分解作为例子.

以 $\mathfrak{g}$ 表 $A_n(n \geqslant 1)$, $B_n(n \geqslant 1)$, $C_n(n \geqslant 1)$ 或 $D_n(n \geqslant 1)$ 之一. 在第一章 §3 中,对于每一个典型李代数我們都定义了一个 n 維交換子代数 $\mathfrak{h}$, 而且从 $\mathfrak{g}$ 的結构公式(1)可以看到

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \sum_{\alpha \in \Sigma} \mathfrak{g}^{\alpha},$$

其中 Σ 表 $\mathfrak{g}$ 的根的全体, 而 $\mathfrak{g}^{\alpha}$ 表由 E_{α} 所生成的一維子空間. 我們有

$$\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}}^{0} = \mathfrak{h}, \quad \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}}^{\alpha} = \mathfrak{g}^{\alpha},$$

因此 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数. 我們注意,

1) $\mathfrak{h}$ 是交換的,

2) $\mathfrak{g}^{\alpha}$ 都是一維的

这两个性質,今后将証明, 是半单代数的 Cartan 子代数和 Cartan 分解所公有的性質.

最后,我們再举出 Cartan 子代数的另一刻划方法.

定理 3. 設 $\mathfrak{g}$ 为李代数, 而 $\mathfrak{h}$ 是它的一个冪零子代数. 令

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g} \text{ 使得 } [X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\},$$

(称为 $\mathfrak{h}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中的正規化子), 則 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数当且仅当 $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}(\mathfrak{h})$.

証. 先証明 $\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}}^{0}$. 設 $X \in \mathfrak{n}(\mathfrak{h})$, 即 $[X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, 亦即 $(\mathrm{ad}\, H)X \in \mathfrak{h}$ 对一切 $H \in \mathfrak{h}$. 因 $\mathfrak{h}$ 冪零, 故有正整数 m 存在, 使 $(\mathrm{ad}\, H)^m X = 0$, 于是 $X \in \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}}^{0}$. 这証明了 $\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}}^{0}$.

現在設 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数, 則 $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}}^{0}$. 于是 $\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) \subset \subset \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}}^{0} = \mathfrak{h}$. 另外,显然有 $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{n}(\mathfrak{h})$, 所以 $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}(\mathfrak{h})$.

反之, 設 $\mathfrak{h} = \mathfrak{n}(\mathfrak{h})$. 根据 Lie 定理的系理 1, 可在 $\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}}^{0}$ 中选取一組基使 $\mathrm{ad}\, H (H \in \mathfrak{h})$ 在 $\mathfrak{g}_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}}^{0}$ 上誘导出的綫性变換的矩陣皆有形状

$$\begin{pmatrix} 0 & & & * \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

于是如 $X \in \mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}}$，則 $(\mathrm{ad}\,H_1)(\mathrm{ad}\,H_2)\cdots(\mathrm{ad}\,H_s)X = 0$ 对一切 $H_1, H_2, \cdots, H_s \in \mathfrak{h}$，而 $s = \dim \mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}}$. 即 $[H_1, (\mathrm{ad}\,H_2)\cdots(\mathrm{ad}\,H_s)X] = 0 \in \mathfrak{h}$ 对一切 $H_1, H_2, \cdots, H_s \in \mathfrak{h}$，由此推出 $(\mathrm{ad}\,H_2)\cdots(\mathrm{ad}\,H_s)X \in \mathfrak{n}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$，对一切 $H_2, \cdots, H_s \in \mathfrak{h}$；即 $[H_2, (\mathrm{ad}\,H_3)\cdots(\mathrm{ad}\,H_s)X] \in \mathfrak{h}$，对一切 $H_2, H_3, \cdots, H_s \in \mathfrak{h}$. 由此推出 $(\mathrm{ad}\,H_3)\cdots(\mathrm{ad}\,H_s)X \in \mathfrak{n}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ 对一切 $H_3, \cdots, H_s \in \mathfrak{h}$. 如此継續下去，最后得 $X \in \mathfrak{n}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$，这証明了 $\mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{h}$，因此 $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}}$，即 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数.

§2. Cartan 子代数的存在性

設 $\mathfrak{g}$ 是李代数，$X \in \mathfrak{g}$. $\mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}\,X}$ 的維数即为 n_X. 过去我們定义过 $\mathfrak{g}$ 的秩 $n = \min\limits_{X \in \mathfrak{g}} n_X$，于是冪零李代数的秩即等于它的維数. 我們也定义过 X 是正則元，如 $n = n_X$.

引理 1. 設 X_0 是 $\mathfrak{g}$ 的一个固定的元素. 如对任意 $Y \in \mathfrak{g}$ 都有无限多个 μ 存在，使 $\mathrm{ad}(X_0 + \mu Y)$ 皆冪零，則 $\mathfrak{g}$ 是冪零李代数.

証. 写出 X 的 Killing 多項式

$$f(\lambda | X) = \lambda^r + a_1(X)\lambda^{r-1} + \cdots + a_r(X).$$

$\mathrm{ad}\,X$ 冪零的充要条件是这个多項式的特征根都是 0，即

$$a_1(X) = \cdots = a_r(X) = 0.$$

任取 $Y \in \mathfrak{g}$，$X_0 + \mu Y$ 的 Killing 多項式是

$$f(\lambda | X_0 + \mu Y) = \lambda^r + a_1(X_0 + \mu Y)\lambda^{r-1} + \cdots + a_r(X_0 + \mu Y).$$

如有无限多个 μ 使 $\mathrm{ad}(X_0 + \mu Y)$ 皆冪零，即有无限多个 μ 存在使

$$a_1(X_0 + \mu Y) = \cdots = a_r(X_0 + \mu Y) = 0.$$

因 $a_1(X_0 + \mu Y), \cdots, a_r(X_0 + \mu Y)$ 皆 μ 的多項式，故

$$a_1(X_0 + \mu Y) \equiv \cdots \equiv a_r(X_0 + \mu Y) \equiv 0.$$

取 $Y = X - X_0$, $\mu = 1$ 就有

$$a_1(X) \equiv \cdots \equiv a_r(X) \equiv 0.$$

因之, ad $X(X \in \mathfrak{g})$ 皆幂零.

根据 Engel 定理知, $\mathfrak{g}$ 是幂零李代数.

定理 4. 設 X_0 是 $\mathfrak{g}$ 的一个正則元, 則 $\mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}\,X_0}$ 是个 Cartan 子代数.

証. 我們有

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}X_0} + \sum_{\lambda\in\Sigma}{}^{\cdot}\, \mathfrak{g}^\lambda_{\mathrm{ad}\,X_0},$$

Σ 是 ad X_0 的非 0 特征根的全体. 令 $\tilde{\mathfrak{g}} = \sum_{\lambda\in\Sigma} \mathfrak{g}^\lambda_{\mathrm{ad}\,X_0}$.

我們先証 $\mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}\,X_0}$ 是幂零子代数. 設 $X \in \mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}\,X_0}$, 則 $[X, \tilde{\mathfrak{g}}] = \tilde{\mathfrak{g}}$. 以 $D(X)$ 表示 ad X 在 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 上誘导出的綫性变换的行列式. 我們知道 $D(X_0) \neq 0$. 对任意 $Y \in \mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}X_0}$, $D(X_0 + \mu Y)$ 是 μ 的多項式; 因 $D(X_0) \neq 0$, 所以有无限多个 μ 使 $D(X_0 + \mu Y) \neq 0$. 由于 $\mathfrak{g}$ 的秩为 n, 故对于这无限多个 μ, $\mathrm{ad}(X_0 + \mu Y)$ 在 $\mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}X_0}$ 中的特征値皆 0, 即 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}X_0}}(X_0 + \mu Y)$ 的特征値皆 0, 即 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}X_0}}(X_0 + \mu Y)$ 幂零. 根据引理 1 知, $\mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}\,X_0}$ 是幂零子代数.

現在令 $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}\,X_0}$. 設 $X \in \mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}\mathfrak{h}}$, 則有正整数 m 存在使

$$(\mathrm{ad}\, H)^m X = 0 \quad 对一切\, H \in \mathfrak{h}.$$

特别, 因 $X_0 \in \mathfrak{h}$, 故

$$(\mathrm{ad}\, X_0)^m X = 0$$

因之 $X \in \mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}\,X_0} = \mathfrak{h}$. 于是 $\mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{h}$, 故 $\mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}\mathfrak{h}} = \mathfrak{h}$, 即 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数.

系理 1. $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数一定存在.

証. 因 $\mathfrak{g}$ 一定包含正則元, 故得証.

系理 2. 設 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个幂零子代数, 而且 $\mathfrak{h}$ 包有 $\mathfrak{g}$ 的一个正則元, 則 $\mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}\mathfrak{h}}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数.

証. 設 X_0 是 $\mathfrak{h}$ 所包含的 $\mathfrak{g}$ 的正則元, 則 $\mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}\,X_0}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan

子代数. 令 $\mathfrak{h}_1=\mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}\,X_0}$. 因 $\mathfrak{h}$ 是冪零子代数, $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}\,X_0}=\mathfrak{h}_1$.
从 $X_0\in\mathfrak{h}\subset\mathfrak{h}_1$ 推出

$$\mathfrak{h}_1=\mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}\,X_0}\supseteq\mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}}\supseteq\mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}_1}=\mathfrak{h}_1.$$

因此 $\mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}}=\mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}\,X_0}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数.

定理 5. 設 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的极大冪零子代数, 如 $\mathfrak{h}$ 包有 $\mathfrak{g}$ 的一个正則元 X_0, 則 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数, 而且 $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}\,X_0}$.

証. 根据定理 4, $\mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}\,X_0}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数. 因 $\mathfrak{h}$ 是冪零子代数, 故 $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}\,X_0}$, 又因 $\mathfrak{h}$ 是极大冪零子代数, 故 $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}\,X_0}$.

§3. 預备知識[1)]

設 V 是 C 上的 n 維向量空間, 并設 $e_1,\cdots,e_n$ 是 V 的一組基, $x_1,\cdots,x_n$ 是 C 上 n 个无关不定元. 于是 V 中一般向量 x 可表作

$$x=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n.$$

再設 W 是 C 上的 m 維向量空間, 并設 $\tilde{e}_1,\cdots,\tilde{e}_m$ 是 W 的一組基, $y_1,\cdots,y_m$ 是 C 上的 m 个无关不定元. 于是 W 中一般向量 w 可表作

$$w=y_1\tilde{e}_1+\cdots+y_m\tilde{e}_m.$$

从 V 到 W 中的一个映射 f:

$$x=x_1e_1+\cdots+x_ne_n\to x'=y_1'\tilde{e}_1+\cdots+y_m'\tilde{e}_m,$$

称为一个多項式映射, 如果

$$\begin{aligned}y_1'&=\varphi_1(x_1,\cdots,x_n),\\&\vdots\\y_m'&=\varphi_m(x_1,\cdots,x_n)\end{aligned}$$

都是 $x_1,\cdots,x_n$ 的多項式. 这时

$$\sum C_{i_1\cdots i_m}y_1^{i_1}\cdots y_m^{i_m}\xrightarrow{\varphi}\sum C_{i_1\cdots i_m}\varphi_1^{i_1}\cdots\varphi_m^{i_m}$$

---

1) 这一节和下一节要求讀者具备代数方面較多的預备知識, 見范德瓦尔登, 代数学, 卷 I, 科学出版社, 北京, 1963. 讀者亦可略去这两节而假定下一节定理 6 成立, 然后可以直接閱讀下文.

就是从 C 上 $y_1, \cdots, y_m$ 的多項式环 $C[y_1, \cdots, y_m]$ 到 C 上 $x_1, \cdots, x_n$ 的多項式环 $C[x_1, \cdots, x_n]$ 中的一个同态，且有性質

$$\varphi(1) = 1,$$

$$\varphi(\lambda\psi(y_1, \cdots, y_m)) = \lambda\cdot\varphi(\psi(y_1, \cdots, y_m)),$$

对一切 $\psi(y_1, \cdots, y_m) \in C[y_1, \cdots, y_m]$ 及 $\lambda \in C$. 这时我們称 φ 是一个么 C-同态，亦称 φ 是由多項式映射 f 所确定的么 C-同态.

反之，設 φ 是从 $C[y_1, \cdots, y_m]$ 到 $C[x_1, \cdots, x_n]$ 中的一个么 C-同态. 令

$$\varphi(y_i) = \varphi_i(x_1, \cdots, x_n), \quad 1 \leqslant i \leqslant m,$$

$\varphi_1, \cdots, \varphi_m$ 为多項式，則

$$x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \rightarrow x' = \varphi_1\tilde{e}_1 + \cdots + \varphi_m\tilde{e}_m$$

就是从 V 到 W 中的多項式映射，而 φ 就是由这个多項式映射所确定的么 C-同态. 因此，从 $C[y_1, \cdots, y_m]$ 到 $C[x_1, \cdots, x_m]$ 中的么 C-同态与从 V 到 W 中的多項式映射一一相应.

我們举一些多項式映射的例子.

例 1. 从 V 映入 W 的綫性映射自然是多項式映射.

例 2. 取 $V = (0)$. 設有从 (0) 映入 W 的映射

$$f:\ 0 \rightarrow w = b_1\tilde{e}_1 + \cdots + b_m\tilde{e}_m,$$

自然，f 可看作多項式映射，而由 f 所确定的从 $C[y_1, \cdots, y_m]$ 到 C 的么 C-同态为

$$\varphi:\ Q(y_1, \cdots, y_m) \rightarrow Q(b_1, \cdots, b_m).$$

我們記 $Q(w) = Q(b_1, \cdots, b_m)$. 这时，$W$ 中向量与 $C[y_1, \cdots, y_m]$ 映入 C 的么 C-同态一一相应.

例 3. 取 $W = C$. 設有从 V 映入 $W = C$ 的映射

$$f:\ v \rightarrow P(v) \in C,$$

如 f 为多項式映射，則 $P(v)$ 为 $x_1, \cdots, x_n$ 的多項式：

$$P(v) = P(x_1, \cdots, x_n).$$

如 $v = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$，則

$$P(v) = P(a_1, \cdots, a_n).$$

因此 f 可看作由多項式 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 所确定。这时記 $f = \tilde{P}$。

以下我們討論多項式映射的分次。設

$$x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \xrightarrow{f} x' = \varphi_1\tilde{e}_1 + \cdots + \varphi_m\tilde{e}_m$$

是从 V 映入 W 的一个多項式映射，即 $\varphi_1, \cdots, \varphi_m$ 皆是 $x_1, \cdots, x_n$ 的多項式。写

$$\varphi_i = \sum_k \varphi_{ik},$$

其中 φ_{ik} 为 $x_1, \cdots, x_n$ 的 k 次齐次多項式。定义

$$x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \xrightarrow{f_k} \varphi_{1k}\tilde{e}_1 + \cdots + \varphi_{mk}\tilde{e}_m,$$

則 $f_k(k = 0, 1, 2, \cdots)$ 都是从 V 映入 W 的多項式映射。自然有

$$f = \sum_k f_k,$$

f_k 称为 f 的 k 次齐次分量。我們有

引理 1. 設 f 是从 V 映入 W 的多項式映射，而 g 是从 W 映入另一綫性空間 U 的多項式映射。設 $h = g \circ f$，即对任意 $v \in V$，令

$$h(v) = g(f(v)),$$

則 h 是从 V 映入 U 的多項式映射。再設 $f = \sum_{k \geqslant k_0 \geqslant 1} f_k$，$g = \sum_{l \geqslant l_0} g_l$ 分别是 f 和 g 分成齐次分量的分解，令 $h = \Sigma h_j$ 是 h 分成齐次分量的分解，則

$$h_j = \begin{cases} 0 & j < k_0l_0, \\ g_{l_0} \circ f_{k_0} & j = k_0l_0. \end{cases}$$

証。設 $\tilde{\tilde{e}}_1, \cdots, \tilde{\tilde{e}}_p$ 为 U 的一組基。再設

$$f: \quad x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \to f(x) = \varphi_1\tilde{e}_1 + \cdots + \varphi_m\tilde{e}_m,$$

$$g: \quad y = y_1\tilde{e}_1 + \cdots + y_m\tilde{e}_m \to g(y) = \psi_1\tilde{\tilde{e}}_1 + \cdots + \psi_p\tilde{\tilde{e}}_p,$$

則

$$g \circ f(x) = \xi_1\tilde{\tilde{e}}_1 + \cdots + \xi_p\tilde{\tilde{e}}_p,$$

而

$$\xi_i = \psi_i(\varphi_1, \cdots, \varphi_m), \quad i = 1, 2, \cdots, p.$$

ψ_i 作为 $x_1, \cdots, x_n$ 的多項式 $\varphi_1, \cdots, \varphi_m$ 的多項式，自然是 $x_1, \cdots, x_n$ 的多項式；这証明了第一个断言. 至于說到第二个断言，注意，当 $k_0 \geqslant 1$ 时，由

$$\xi_i = \sum_{l \geqslant l_0} \psi_{il}\left(\sum_{k \geqslant k_0} \varphi_{1k}, \cdots, \sum_{k \geqslant k_0} \varphi_{mk}\right)$$

推出

$$\xi_{ij} = \begin{cases} 0, & j < k_0 l_0 \\ \psi_{il_0}(\varphi_{1k_0}, \cdots, \varphi_{mk_0}), & j = k_0 l_0 \end{cases}$$

即

$$h_j = \begin{cases} 0, & j < k_0 l_0 \\ g_{l_0} \circ f_{k_0}, & j = k_0 l_0. \end{cases}$$

引理 1 証毕.

現在我們来定义多項式映射的微分. 設 f 是从 V 映入 W 的多項式映射. 設 $x, v \in V$. 令

$$\Delta f(x, v) = f(v + x) - f(v),$$

則当 v 固定时，

$$x \to \Delta f(x, v)$$

也是从 V 映入 W 的多項式映射. 这个多項式映射沒有零次分量而它的綫性分量称为 f 在 v 处的微分，記作 $(df)_v$. $(df)_v$ 是从 V 映入 W 的綫性映射.

引理 2. 設 f 是 V 映入 W 的多項式映射而 g 是 W 映入 U 的多項式映射，令 $h = g \circ f$. 設 $v \in V$ 而 $w = f(v)$，則

$$(dh)_v = (dg)_w \circ (df)_v$$

証. 設 $x \in V$，則

$$\begin{aligned} \Delta h(x, v) &= h(x + v) - h(v) = g(f(x + v)) - g(f(v)) \\ &= g(f(v) + \Delta f(x, v)) - g(f(v)) \\ &= g(w + \Delta f(x, v)) - g(w) \\ &= \Delta g(\Delta f(x, v), w). \end{aligned}$$

因 Δf 和 Δg 无零次分量，比較上式双方一次分量，再利用引理 1

就有

$$(dh)_v = (dg)_w \circ (df)_v.$$

引理 3. 設 f 是从 V 映入 W 的多項式映射,并假定对一个固定的 v, $(df)_v$ 将 V 映到 W 之上,則由 f 所确定的从 $C[y_1, \cdots, y_m]$ 到 $C[x_1, \cdots, x_n]$ 中的么 C-同态 φ 是么 C-同构.

証. 首先,显然 φ 将 $C[y_1, \cdots, y_m]$ 中的常数保持不动.

其次,設 P 是 $C[y_1, \cdots, y_m]$ 中一个次数 $\geqslant 1$ 的多項式. 我們来証明 $\varphi(P) \neq 0$. P 确定从 W 映入 C 的一个多項式映射 $\tilde{P}$:

$$\tilde{P}: \quad b_1\tilde{e}_1 + \cdots + b_m\tilde{e}_m \to P(b_1, \cdots, b_m).$$

这时 $h = \tilde{P} \circ f$ 就是从 V 映入 C 的一个多項式映射. 設 x 为 V 中一般向量,而 $f(x) = \varphi_1\tilde{e}_1 + \cdots + \varphi_m\tilde{e}_m$, 則

$$h(x) = \tilde{P} \circ f(x) = P(f(x)) = P(\varphi_1, \cdots, \varphi_m) = \varphi(P).$$

因此要証 $\varphi(P) \neq 0$, 只須証 $h = \tilde{P} \circ f \neq 0$ 即可. 根据引理 2 的証明,有

$$\Delta h(x, v) = \Delta\tilde{P}(\Delta f(x, v), w),$$

其中 $w = f(v)$. 将 $\Delta\tilde{P}$ 的最低次項記作 $(\Delta\tilde{P})_{k_0}$. 因 P 的次数 $\geqslant 1$,故 $\Delta\tilde{P} \neq 0$,因而 $(\Delta\tilde{P})_{k_0} \neq 0$. 这时根据引理 1, $\Delta h(x, v)$ 的最低次項将是 $(\Delta\tilde{P})_{k_0} \circ (df)_v$. 因 $(df)_v$ 将 V 映到 W 之上, 故 $\Delta\tilde{P}_{k_0} \circ (df)_v \neq 0$. 于是 $\Delta h(x, v) \neq 0$. 因此 $h = \tilde{P} \circ f \neq 0$. 这証明了引理 3.

引理 4. 設 f 是将 n 維空間 V 映入 m 維空間 W 的多項式映射,并假設对于一个給定的 v_0, $(df)_{v_0}$ 将 V 映到 W 之上. 設 $e_1, \cdots, e_n$ 是 V 的一組基,而 $\tilde{e}_1, \cdots, \tilde{e}_m$ 是 W 的一組基. 設 $P(x_1, \cdots, x_n) \in C[x_1, \cdots, x_n]$. 对于 $v = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$, 置 $P(v) = P(a_1, \cdots, a_n)$. 于是, 对于 $C[x_1, \cdots, x_n]$ 中任一非 0 多項式 $P(x_1, \cdots, x_n)$ 都可以求得 $C[y_1, \cdots, y_m]$ 中的一个非 0 多項式 $Q(y_1, \cdots, y_m)$,使得: 如 $Q(w) \neq 0$, 对某一 $w \in W$,則必有 $v \in V$ 使 $w = f(v)$ 而且 $P(v) \neq 0$.

証. 在引理 4 的假設下,由 f 所确定的从 $C[y_1, \cdots, y_m]$ 映

入 $C[x_1, \cdots, x_n]$ 的么 C-同态 φ 是个同构. 利用此同构 φ 将 $C[y_1, \cdots, y_m]$ 嵌入 $C[x_1, \cdots, x_n]$. 对于任一 $v \in V$, v 决定从 $C[x_1, \cdots, x_n]$ 映入 C 的一个么 C-同态 φ_v:

$$P(x_1, \cdots, x_n) \to P(v).$$

这个同态 φ_v 对 $C[y_1, \cdots, y_m]$ 的限制就是从 $C[y_1, \cdots, y_m]$ 映入 C 的一个么 C-同态 $\varphi_v \circ \varphi$, 因此由 W 中一个向量 w 所定, 即对一切 $Q(y_1, \cdots, y_m) \in C[y_1, \cdots, y_m]$,

$$\varphi_v \circ \varphi(Q) = Q(w).$$

設 $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in V$, 記

$$f(x) = \varphi_1\tilde{e}_1 + \cdots + \varphi_m\tilde{e}_m,$$

而 $\varphi_1, \cdots, \varphi_m$ 为 $x_1, \cdots, x_n$ 的多項式, 則又有

$$\begin{aligned}\varphi_v \circ \varphi(Q) &= \varphi_v(Q(\varphi_1, \cdots, \varphi_m)) \\ &= Q(\varphi_1(v), \cdots, \varphi_m(v)) = Q(f(v)).\end{aligned}$$

因么 C-同态 $\varphi_v \circ \varphi$ 由 W 中唯一的一个向量所确定, 故

$$w = f(v).$$

因此引理化为証明: 存在一个 $Q(y_1, \cdots, y_m)$, 使得任一将 $C[y_1, \cdots, y_m]$ 映入 C 的么 C-同态不将 Q 映到 0 者皆可扩充成一个将 $C[x_1, \cdots, x_n]$ 映入 C 的么 C-同态而不将 P 映到 0.

記 $A = C[x_1, \cdots, x_n]$, $B = \varphi(C[y_1, \cdots, y_m])$. 設 A 由 B 添加有限个元素 $z_1, \cdots, z_h$ 所生成, $A = B[z_1, \cdots, z_h]$. 置 $A_k = B[z_{k+1}, \cdots, z_h]$, 則 $A_0 = A$, $A_h = B$, $A_{k-1} = A_k[z_k]$. 現在对于 A_0 已給定 $P \in A_0$, $P \neq 0$. 假定对于 A_{k-1} 已給定 $P_{k-1} \in A_{k-1}$, $P_{k-1} \neq 0$, 可在 A_k 中找到 $P_k \neq 0$, 使得任一将 A_k 映入 C 的么 C-同态而不将 P_k 映到 0 者, 皆可扩充成将 A_{k-1} 映入 C 的么 C-同态而不将 P_{k-1} 映到 0 ($k = 1, \cdots, h$). 那么我們的引理就証明了.

对于一个固定的 k, 我們区别 z_k 适合系数属于 A_{k-1} 的一个多項式的情形与 z_k 不适合系数属于 A_{k-1} 的任一多項式的情形.

1) $A_{k-1} = A_k[z_k]$, $P_{k-1} \in A_{k-1}$, $P_{k-1} \neq 0$, z_k 不适合系数属

于 A_k 的任何多项式. 这时 A_{k-1} 就是系数属于 A_k 的 z_k 的多項式环. 显然, 这时 A_k 映入 C 的任一么 C-同态 ψ 皆可扩充成将 A_{k-1} 映入 C 的么 C-同态 $\bar{\Phi}$, 如命 $\bar{\Phi}(z_k)=b$, 而 b 为 C 中任一元. 因 $P_{k-1}\neq 0$, P_{k-1} 至少有一个非 0 系数 P_k. 設 ψ 是一个将 A_k 映入 C 的么 C-同态并将 P_k 不映为 0. 将 ψ 作用到 P_{k-1} 的系数之上,就得到一个系数属于 C 的 z_k 的多項式 $\bar{P}_{k-1}$. 因 $\psi(P_k)\neq 0$, 故 $\bar{P}_{k-1}\neq 0$, 因此有 $b\in C$ 使 $\bar{P}_{k-1}(b)\neq 0$. 这样, ψ 可扩充成将 A_{k-1} 映入 C 的么 C-同态 $\bar{\Phi}$, 如令 $\bar{\Phi}(z_k)=b$. 自然有 $\bar{\Phi}(P_{k-1})=\bar{P}_{k-1}(b)\neq 0$.

2) $A_{k-1}=A_k[z_k]$, $P_{k-1}\in A_{k-1}$, $P_{k-1}\neq 0$, z_k 适合系数属于 A_k 的一个多項式. 設 ψ 是从 A_k 映入 C 的么 C-同态. 如果 ψ 能扩充成从 A_{k-1} 映入 C 的么 C-同态 $\bar{\Phi}$ 而 $\bar{\Phi}(z_k)=b$, 那么 b 一定要适合所有的多項式 $\bar{P}$, 而 $\bar{P}$ 是将 ψ 作用到 z_k 所适合的系数属于 A_k 的多項式 P 的系数之后所获得者. 設 $P(X)$ 是 z_k 所适合的次数最低的多項式(系数属 A_k). 記 $P(X)=a_0+a_1X+\cdots+a_nX^n$, $a_i\in A_k$, $a_n\neq 0$. 設 $Q(X)$ 是另一个多項式, 用 $P(X)$ 去除 $Q(X)$ 得

$$a_n^l Q(X)=U(X)P(X)+V(X),$$

其中 l 充分大, U, V 的系数属 A_k, $\deg V<\deg P$. 如 z_k 适合 $Q(X)$, 則 $V(z_k)=0$. 因此对于 z_k 所适合的多項式 $Q(X)$ 恆有

$$a_n^l Q(X)=U(X)P(X).$$

因此,如果 $\psi(a_n)\neq 0$, 則从 $\bar{P}(b)=0$ 推出 $\psi(a_n)^l\bar{Q}(b)=0$, 因之 $\bar{Q}(b)=0$. 因此, 如果 $\psi(a_n)\neq 0$, 則当且仅当 $\bar{\Phi}(z_k)=b$ 是 $\bar{P}$ 的一个根时, ψ 可扩充成从 A_{k-1} 映入 C 的同态 $\bar{\Phi}$.

再者, 因 A_{k-1} 的商域在 A_k 的商域上是代数的, 故 A_{k-1} 中每个元素皆适合系数属于 A_k 的一个多項式. 設 P_{k-1} 所适合的最低次多項式是 $H(X)$, 写

$$H(X)=b_0+b_1X+\cdots+b_mX^m,\ b_i\in A_k,\ b_m\neq 0$$

則 $b_0\neq 0$. 于是

$$\overline{H}(X) = \psi(b_0) + \psi(b_1)X + \cdots + \psi(b_m)X^m.$$

由 $H(P_{k-1}) = 0$ 推出 $\overline{\Phi}(H(P_{k-1})) = 0$，即

$$\overline{H}(\overline{\Phi}(P_{k-1})) = \psi(b_0) + \psi(b_1)\overline{\Phi}(P_{k-1}) + \cdots + \\ + \psi(b_m)\overline{\Phi}(P_{k-1})^m = 0.$$

因此，如 $\psi(b_0) \neq 0$，則 $\overline{\Phi}(P_{k-1}) \neq 0$. 于是，令 $P_k = a_n b_0$，那么，如果 ψ 不将 P_k 映到 0，$\overline{\Phi}$ 亦不将 P_{k-1} 映为 0.

这样我們的引理就証明了.

§4. Cartan 子代数的共軛性

引理 5. 設 $\mathfrak{g}$ 为李代数，$X \in \mathfrak{g}$. 如果 ad X 是冪零綫性变換，則

$$\sigma(X) = \exp \operatorname{ad} X = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} (\operatorname{ad} X)^m \text{ (只有有限項)}$$

是 $\mathfrak{g}$ 的一个自同构.

証. 設 $Y, Z \in \mathfrak{g}$; 我們有

$$\operatorname{ad} X[Y, Z] = [\operatorname{ad} XY, Z] + [Y, \operatorname{ad} XZ].$$

用归納法可証

$$(\operatorname{ad} X)^m [Y, Z] = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} [(\operatorname{ad} X)^k Y, (\operatorname{ad} X)^{m-k} Z].$$

因此

$$\sigma(X)[Y, Z] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} [(\operatorname{ad} X)^k Y, (\operatorname{ad} X)^{m-k} Z]$$
$$= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\operatorname{ad} X)^k Y, \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} (\operatorname{ad} X)^l Z\right]$$
$$= [\sigma(X)Y, \sigma(X)Z].$$

又显然，$\sigma(X)$ 是可逆綫性变換，因此 $\sigma(X)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的自同构.

定理 6 (Cartan-Chevalley)[1]. 1) 設 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数. 对 $\mathfrak{g}$ 相对于 $\mathfrak{h}$ 的一切非零根 α, 如果 $H\in\mathfrak{h}$ 具有性质 $\alpha(H)\neq 0$, 則 H 是 $\mathfrak{g}$ 的正則元素.

2) 以 A 記由一切 $\sigma(X)$ (ad X 冪零) 所生成的 $\mathfrak{g}$ 的一个自同构羣, 則 $\mathfrak{g}$ 的任意两个 Cartan 子代数对于 A 都是共軛的, 卽 A 中有一元素将这两个 Cartan 子代数之一变为另一个.

証. 設 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数, Σ 是 $\mathfrak{g}$ 相对于 $\mathfrak{h}$ 的非零根的全体, 則 $\mathfrak{g}$ 有 Cartan 分解

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\dotplus\sum_{\alpha\in\Sigma}{}^{\cdot}\,\mathfrak{g}^{\alpha},\quad \mathfrak{h}=\mathfrak{g}^{0}_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}}.$$

我們知道 $[\mathfrak{g}^{\alpha},\mathfrak{g}^{\beta}]\subset\mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$; 因此, 如 $X\in\mathfrak{g}^{\alpha}$, ad X 就将 $\mathfrak{g}^{\beta}$ 映入 $\mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$, 因而 $(\mathrm{ad}\,X)^{k}$ 将 $\mathfrak{g}^{\beta}$ 映入 $\mathfrak{g}^{k\alpha+\beta}$. 因 Σ 是有限集, 故 ad X 冪零, 于是 $\sigma(X)=\exp\mathrm{ad}\,X$ 就是 $\mathfrak{g}$ 的一个自同构.

設 $\Sigma=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$. 考察从 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}\dotplus\mathfrak{g}^{\alpha_1}\dotplus\cdots\dotplus\mathfrak{g}^{\alpha_m}$ 映入 $\mathfrak{g}$ 的映射 f:

$$f(H,X_1,X_2,\cdots,X_m)=\sigma(X_1)\cdots\sigma(X_m)H,$$
$$(H\in\mathfrak{h},\ X_1\in\mathfrak{g}^{\alpha_1},\ \cdots,\ X_m\in\mathfrak{g}^{\alpha_m}).$$

因 ad $X_1,\cdots$, ad X_m 皆冪零, 显而易見, 这是个多項式映射. 我們来計算 f 在点 $(H_0,0,\cdots,0)$ 处的微分:

$$\begin{aligned}\Delta f(H,X_1,X_2,\cdots,X_m;H_0,0,\cdots,0)&=\\ &=f(H+H_0,X_1,X_2,\cdots,X_m)-f(H_0,0,\cdots,0)\\ &=\sigma(X_1)\sigma(X_2)\cdots\sigma(X_m)(H+H_0)-H_0\\ &=\sum_{k_1,\cdots,k_m}\frac{1}{\Pi k_i!}[X_1^{k_1},[X_2^{k_2},\cdots[X_m^{k_m},H]\cdots]]\\ &\quad+\sum_{k_1,\cdots,k_m}\frac{1}{\Pi k_i!}[X_1^{k_1},[X_2^{k_2},\cdots[X_m^{k_m},H_0]\cdots]]-H_0,\end{aligned}$$

---

1) C. Chevalley, An algebraic proof of a property of Lie groups, *Amer. J. Math.*, **63** (1941), 785—793; C. Chevalley, Théorie des Groupes de Lie, Tom III, Paris, 1955.

其中置 $[X^k, Y]=(\mathrm{ad}\,X)^kY$. 注意 $[X_1^{k_1},[X_2^{k_2},\cdots[X_m^{k_m},H]\cdots]]$ 是齐次的,次数是 $k_1+k_2+\cdots+k_m+1$, 而 $[X_1^{k_1},[X_2^{k_2},\cdots[X_m^{k_m},H_0]\cdots]]$ 也是齐次的, 次数是 $k_1+k_2+\cdots+k_m$. 这里所謂次数指的是将 $[X_1^{k_1}[X_2^{k_2}\cdots[X_m^{k_m},H]\cdots]]$ 在 $\mathfrak{g}$ 的一組基(由 $\mathfrak{h}$ 的一組基, $\mathfrak{g}^{\alpha_1}$ 的一組基, $\cdots$, $\mathfrak{g}^{\alpha_m}$ 的一組基組成) 中表出时, 它的系数是相应的 $X_1, X_2, \cdots, X_m, H$ 的系数的多項式的次数. 因此

$$df(H_1, X_1, \cdots, X_m; H_0, 0, \cdots, 0) = H + \sum_{i=1}^m [X_i, H_0].$$

現在选取 $H_0\in\mathfrak{h}$ 使 $\prod_{i=1}^m \alpha_i(H_0) \neq 0$. 如果

$$df(H, X_1, \cdots, X_m; H_0, 0, \cdots, 0) = 0,$$

卽

$$H + \sum_{i=1}^m [X_i, H_0] = 0,$$

則因 $[X_i, H_0]\in\mathfrak{g}^{\alpha_i}$, 故 $H=0$, $[X_i, H_0]=0$ 对一切 $i=1,\cdots,m$. 又因 $\mathrm{ad}\,H_0$ 在 $\mathfrak{g}^{\alpha_i}$ 中的行列式是 $(\alpha_i(H_0))^{\dim\mathfrak{g}^{\alpha_i}}\neq 0$, 故 $\mathrm{ad}\,H_0$ 在 $\mathfrak{g}^{\alpha_i}$ 上非奇异. 因此从 $[X_i, H_0]=0$ 推出 $X_i=0$. 这就証明了,如选取 $H_0\in\mathfrak{h}$ 使 $\prod_{i=1}^m \alpha_i(H_0)\neq 0$, 則 $(df)_{(H_0,0,\cdots,0)}$ 将 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{g}^{\alpha_1}+\cdots+\mathfrak{g}^{\alpha_m}$ 映到 $\mathfrak{g}$ 之上.

現在可以运用 §3 中引理 4 了.

以 G 表由一切 $\sigma(X)(X\in\mathfrak{g}^\alpha)$所生成的 $\mathfrak{g}$ 的一个自同构羣. 注意, $\prod_{i=1}^m \alpha_i(H)$ 可看作給定在 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathfrak{g}^{\alpha_1}+\cdots+\mathfrak{g}^{\alpha_m}$ 上的一个非零多項式函数. 实际上, 如在 $\mathfrak{h}$ 中选一組基 $H_1,\cdots,H_n$, 令 $\alpha_i(H_k)=\alpha_{ik}$, 設 $H=x_1H_1+\cdots+x_nH_n$, 則 $\prod_{i=1}^m \alpha_i(H)=$

$\prod_{i=1}^{m}(\alpha_{i1}x_1+\cdots+\alpha_{in}x_n)$。于是存在着定义在 $\mathfrak{g}$ 上的一个多项式函数 $Q \not\equiv 0$，使得对任何 $X\in\mathfrak{g}$ 具有性质 $Q(X)\neq 0$ 者，皆在 G 之下共軛于 $\mathfrak{h}$ 中的一个元素 H 具有性質 $\prod_{i=1}^{m}\alpha_i(H)\not\equiv 0$. 設 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 多項式是

$$|\lambda I-\operatorname{ad}X|=\lambda^r+\varphi_1(X)\lambda^{r-1}+\cdots+\varphi_{r-n}(X)\lambda^n,$$

$\varphi_{r-n}(X)\not\equiv 0$. 如 $X_0\in\mathfrak{g}$ 而 $\varphi_{r-n}(X_0)\not\equiv 0$，則 X_0 为 $\mathfrak{g}$ 的正則元。显然，$\mathfrak{g}$ 的自同构将正則元变到正則元，特别 G 中元素将正則元变到正則元. 因 $Q(X)\varphi_{r-n}(X)\not\equiv 0$，所以可求得 $X_0\in\mathfrak{g}$ 具有性質 $Q(X_0)\varphi_{r-n}(X_0)\not\equiv 0$；这时 X_0 是 $\mathfrak{g}$ 的正則元而 $Q(X_0)\neq 0$，因此 X_0 是 $\mathfrak{h}$ 中某一元素 H_0 在 G 之下的象，而 $\prod_{i=1}^{m}\alpha_i(H)\neq 0$。这就証明了 $\mathfrak{h}$ 一定包含一个正則元 H_0。由此自然推出，如 $H\in\mathfrak{h}$ 具性質 $\prod_{i=1}^{m}\alpha_i(H)\not\equiv 0$，則 H 就是 $\mathfrak{g}$ 的正則元，同时根据定理 5 有

$$\mathfrak{g}^0_{\operatorname{ad}H_0}=\mathfrak{h}=\mathfrak{g}^0_{\operatorname{ad}H}.$$

适才我們証明了 $\mathfrak{g}$ 中一个正則元 X_0 如有性質 $Q(X_0)\not\equiv 0$，X_0 就是 $\mathfrak{h}$ 中一个正則元在 G 之下的象. 現在，設 $\mathfrak{h}'$ 是 $\mathfrak{g}$ 的另一个 Cartan 子代数，相对于这个 Cartan 子代数，我們有 $\mathfrak{g}$ 上的非零多項式函数 $Q'(x)$ 和 $\mathfrak{g}$ 的一个自同构羣 G'. 同样可証明 $\mathfrak{g}$ 中一个正則元 X_0 如有性質 $Q'(X_0)\neq 0$，則 X_0 就是 $\mathfrak{h}'$ 中一个正則元在 G' 之下的象. G 和 G' 都属于羣 A。現在，如 X_0 是 $\mathfrak{g}$ 的一个正則元而有性質 $Q(X_0)Q'(X_0)\not\equiv 0$，則 X_0 在 A 之下旣共軛于 $\mathfrak{h}$ 中一个正則元 H_0，也共軛于 $\mathfrak{h}'$ 中一个正則元 H_0'. 因此 H_0 和 H_0' 在 A 之下共軛. 又因 $\mathfrak{h}=\mathfrak{g}^0_{\operatorname{ad}H_0}$，$\mathfrak{h}'=\mathfrak{g}^0_{\operatorname{ad}H_0'}$，故 $\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{h}'$ 在 A 之下共軛.

这样定理 6 就完全証明了.

第四章　Cartan 判断准則

§1. 預备知識

設 $\mathfrak{g}$ 是李代数. 在下面的討論中，我們固定 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数，記这个 Cartan 子代数为 $\mathfrak{h}$. 設 $\mathfrak{g}$ 是 r 維的，而 $\mathfrak{h}$ 是 n 維的. $\mathfrak{g}$ 在 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,\mathfrak{h}$ 的作用下有以下的 Cartan 分解：

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \sum_{\varphi\in\Sigma} \mathfrak{g}^{\varphi} = \sum_{\varphi\in\Delta} \mathfrak{g}^{\varphi},$$

其中 Δ 是 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,\mathfrak{h}$ 的权的集合，而 Σ 是 $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,\mathfrak{h}$ 的不等于 0 的权的集合，称为 $\mathfrak{g}$ 对于 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的根的集合，簡称 $\mathfrak{g}$ 的根系，$\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^{0}_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}}$, $\mathfrak{g}^{\varphi} = \mathfrak{g}^{\varphi}_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}}$. 以 ν_{φ} 表 $\mathfrak{g}^{\varphi}$ 的維数，于是我們有

引理 1. 設 $X, Y \in \mathfrak{h}$, 則

$$(X, Y) = \sum_{\varphi\in\Sigma} \nu_{\varphi}\varphi(X)\varphi(Y). \tag{1}$$

証. 設 $\varphi \in \Delta$, $X \in \mathfrak{h}$, 則 $\mathrm{ad}\,X$ 在子空間 $\mathfrak{g}^{\varphi}$ 中的特征根都等于 $\varphi(X)$, 因此 $(\mathrm{ad}\,X)^2$ 在子空間 $\mathfrak{g}^{\varphi}$ 中的特征根都等于 $\varphi(X)^2$. 于是

$$\mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}^{\varphi}}(\mathrm{ad}\,X)^2 = \nu_{\varphi}\varphi(X)^2.$$

因之

$$(X, X) = \mathrm{Tr}_{\mathfrak{g}}(\mathrm{ad}\,X)^2 = \sum_{\varphi\in\Delta} \nu_{\varphi}\varphi(X)^2 = \sum_{\varphi\in\Sigma} \nu_{\varphi}\varphi(X)^2.$$

設 $X, Y \in \mathfrak{h}$, 則

$$\begin{aligned}(X+Y, X+Y) &= \sum_{\varphi\in\Sigma} \nu_{\varphi}\varphi(X+Y)^2 \\ &= \sum_{\varphi\in\Sigma} \nu_{\varphi}\varphi(X)^2 + 2\sum_{\varphi\in\Sigma} \nu_{\varphi}\varphi(X)\varphi(Y) + \sum_{\varphi\in\Sigma} \nu_{\varphi}\varphi(Y)^2 \\ &= (X, X) + 2\sum_{\varphi\in\Sigma} \nu_{\varphi}\varphi(X)\varphi(Y) + (Y, Y).\end{aligned} \tag{2}$$

另一方面，

$$(X+Y, X+Y)=(X, X)+2(X, Y)+(Y, Y). \quad (3)$$

比較(2),(3)两式即得(1)式。

引理 2. 設 $\varphi \in \Delta$, $\alpha \in \Delta$, 而且 $-\alpha \in \Delta$. 并設 p 和 q 是非負整数使 $[\mathfrak{g}^{-\alpha}, \mathfrak{g}^{\varphi-p\alpha}]=[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{\varphi+q\alpha}]=0$. 再設

$$r_{\varphi,\alpha}=-\frac{\sum_{k=-p}^{q} k\nu_{\varphi+k\alpha}}{\sum_{k=-p}^{q} \nu_{\varphi+k\alpha}},$$

則对任一 $Z \in [\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$,

$$\varphi(Z)=r_{\varphi,\alpha}\alpha(Z). \quad (4)$$

特別,对任一 $Z \in [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}]=\mathscr{D}\mathfrak{h}$, 恆有 $\varphi(Z)=0$.

証. 因(4)式双方都是 Z 的綫性函数,所以只需对 $Z=[X_{\alpha}, X_{-\alpha}]$, $X_{\alpha} \in \mathfrak{g}^{\alpha}$, $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ 来証明(4)式即可. 由于 $[\mathfrak{g}^{-\alpha}, \mathfrak{g}^{\varphi-p\alpha}]=[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{\varphi+q\alpha}]=0$, 所以子空間

$$\tilde{\mathfrak{g}}=\sum_{k=-p}^{q} \mathfrak{g}^{\varphi+k\alpha}$$

在 $\operatorname{ad} X_{-\alpha}$ 和 $\operatorname{ad} X_{\alpha}$ 的作用下都不变.于是可以計算 $\operatorname{ad} Z=\operatorname{ad}[X_{\alpha}, X_{-\alpha}]=\operatorname{ad} X_{\alpha} \operatorname{ad} X_{-\alpha}-\operatorname{ad} X_{-\alpha} \operatorname{ad} X_{\alpha}$ 在 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 中的迹. 自然有

$$\operatorname{Tr}_{\tilde{\mathfrak{g}}} \operatorname{ad} Z=0. \quad (5)$$

另一方面, 因 $Z \in \mathfrak{h}$, $\operatorname{ad} Z$ 在 $\mathfrak{g}^{\varphi+k\alpha}$ 中的特征根都等于 $(\varphi+k\alpha)(Z)=\varphi(Z)+k\alpha(Z)$, 所以

$$\operatorname{Tr}_{\tilde{\mathfrak{g}}} \operatorname{ad} Z=\sum_{k=-p}^{q} \nu_{\varphi+k\alpha}(\varphi(Z)+k\alpha(Z)). \quad (6)$$

从(5)式及(6)式得

$$\sum_{k=-p}^{q} \nu_{\varphi+k\alpha}(\varphi(Z)+k\alpha(Z))=0,$$

由此推出

$$\varphi(Z) = -\frac{\sum_{k=-p}^{q} k\nu_{\varphi+k\alpha}}{\sum_{k=-p}^{q} \nu_{\varphi+k\alpha}} \cdot \alpha(Z).$$

§ 2. 李代数可解性的 Cartan 判断准則

設 $\mathfrak{g}$ 是李代数. 根据 Lie 定理我們知道, $\mathfrak{g}$ 可解当且仅当 $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ 冪零. 又根据 Engel 定理, $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ 冪零当且仅当 $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ 中每个元素皆冪零, 即 $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ 中每个元素的 Killing 多項式都是 λ^r. 因此我們有

定理 1. $\mathfrak{g}$ 可解当且仅当 $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ 中每个元素的 Killing 多項式都是 λ^r.

注意, $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ 中任一元素 X 的 Killing 多項式皆 λ^r, 就是說它的 Killing 多項式的系数

$$a_1(X) \equiv a_2(X) \equiv \cdots \equiv a_r(X) \equiv 0.$$

Cartan 将这个結果減弱为

定理 2 (Cartan 关于李代数可解性的判断准則). $\mathfrak{g}$ 可解当且仅当 $(X, X) = 0$, 对所有 $X \in \mathscr{D}\mathfrak{g}$.

証. 先設 $\mathfrak{g}$ 可解, 于是根据定理 1 有

$$a_1(X) = a_2(X) = \cdots = a_r(X) = 0,$$

对所有 $X \in \mathscr{D}\mathfrak{g}$. 因为对任意 $X \in \mathfrak{g}$ 都有

$$(X, X) = a_1(X)^2 - 2a_2(X),$$

所以对所有 $X \in \mathscr{D}\mathfrak{g}$,

$$(X, X) = 0.$$

反之, 設 $(X, X) = 0$, 对所有 $X \in \mathscr{D}\mathfrak{g}$. 我們用归納法向 $\mathfrak{g}$ 的維数来証明 $\mathfrak{g}$ 可解. 我們首先証明, 如 $\alpha, -\alpha \in \Delta$, 而 $Z \in [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}]$, 則 $\varphi(Z) = 0$对一切 $\varphi \in \Delta$. 因 $Z \in \mathscr{D}\mathfrak{g}$, 我們有 $(Z, Z) = 0$. 又因 $Z \in \mathfrak{h}$, 根据引理 1,

$$(Z, Z) = \sum_{\varphi \in \Delta} \nu_\varphi \varphi(Z)^2.$$

于是

$$\sum_{\varphi\in\Delta}\nu_\varphi\varphi(Z)^2=0. \tag{7}$$

再根据引理 2，$\varphi(Z)$ 是 $\alpha(Z)$ 的有理倍数，因此由(7)式推出

$$\alpha(Z)=0.$$

再由(4)式即可推出对一切 $\varphi\in\Delta$，

$$\varphi(Z)=0.$$

其次我們証明，对一切 $Z\in[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\cap\mathfrak{h}$，$\varphi(Z)=0$．从 $\mathfrak{g}=\sum_{\varphi\in\Delta}\mathfrak{g}^\varphi$，我們推出

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\sum_{\varphi,\psi\in\Delta}[\mathfrak{g}^\varphi,\mathfrak{g}^\psi].$$

命

$$\tilde{\mathfrak{g}}^\varphi=\sum_{\psi\in\Delta}[\mathfrak{g}^\psi,\mathfrak{g}^{\varphi-\psi}],$$

则 $\tilde{\mathfrak{g}}^\varphi\subset\mathfrak{g}^\varphi$．因此

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]=\sum_{\varphi\in\Delta}\tilde{\mathfrak{g}}^\varphi$$

是直和．于是

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]\cap\mathfrak{h}=\tilde{\mathfrak{g}}^0=\sum_{\psi\in\Delta}[\mathfrak{g}^\psi,\mathfrak{g}^{-\psi}].$$

因此，由对一切 $Z\in[\mathfrak{g}^\psi,\mathfrak{g}^{-\psi}]$，$\varphi(Z)=0$ 及上式即可推出，对一切 $Z\in\mathscr{D}\mathfrak{g}\cap\mathfrak{h}$，$\varphi(Z)=0$．

現在我們断言 $\mathfrak{g}\neq\mathscr{D}\mathfrak{g}$．实际上，如 $\mathfrak{g}=\mathscr{D}\mathfrak{g}$，则 $\mathscr{D}\mathfrak{g}\cap\mathfrak{h}=\mathfrak{h}$．因此对一切 $Z\in\mathfrak{h}$，$\varphi(Z)=0$．这就是說，ad$\mathfrak{h}$ 只有一个权，它就是0．那么 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}$．但 $\mathfrak{h}$ 冪零，故 $\mathscr{D}\mathfrak{h}\neq\mathfrak{h}$，因之 $\mathscr{D}\mathfrak{g}\neq\mathfrak{g}$．矛盾．

以 $(X,X)_1$ 表 $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ 的 Killing 型．因 $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想，故

$$(X,X)_1=(X,X),\ \text{对一切}\ X\in\mathscr{D}\mathfrak{g}.$$

于是

$$(X,X)_1=0,\ \text{对一切}\ X\in\mathscr{D}\mathfrak{g}.$$

特别

$$(X, X)_1 = 0,\ 对一切\ X \in \mathscr{D}(\mathscr{D}\mathfrak{g}),$$

故 $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ 也适合定理 2 的假設. 由于 $\mathscr{D}\mathfrak{g} \neq \mathfrak{g}$，根据归納法假設，$\mathscr{D}\mathfrak{g}$ 可解，因此 $\mathfrak{g}$ 也可解.

系理. 对一切 $X \in \mathfrak{g}$，如 $(X, X) = 0$，則 $\mathfrak{g}$ 可解.

§3. 李代数半单性的 Cartan 判断准則

定理 3. $\mathfrak{g}$ 半单当且仅当 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型非退化.

証. 从 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型非退化推出 $\mathfrak{g}$ 半单已在第一章中証明（見第一章定理 4）.

現在設 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型退化. 命

$$\mathfrak{n} = \{X \mid X \in \mathfrak{g}\ 使得对一切\ Y \in \mathfrak{g}: (X, Y) = 0\}.$$

則 $\mathfrak{n}$ 不为 0，而且根据第一章引理 1，$\mathfrak{n}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 以 $(X, Y)_\mathfrak{n}$ 表 $\mathfrak{n}$ 的 Killing 型，則

$$(X, Y)_\mathfrak{n} = (X, Y),\ 对\ X, Y \in \mathfrak{n}.$$

因此

$$(X, X) = 0,\ 对一切\ X \in \mathfrak{n}.$$

由定理 2 知 $\mathfrak{n}$ 可解，因此 $\mathfrak{g}$ 不半单.

定理 4. 半单李代数 $\mathfrak{g}$ 是它所有的极小理想的直和，这些极小理想都是单李代数，而且对 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型两两正交.

系理 1. 半单李代数的理想一定半单，而且如果 $\mathfrak{g}_1$ 是半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想，那么一定有一个理想 $\mathfrak{g}_2$ 使 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \dotplus \mathfrak{g}_2$，同时 $\mathfrak{g}_2$ 由 $\mathfrak{g}_1$ 唯一确定.

系理 2. 設 $\mathfrak{g}$ 是半单李代数，則 $\mathfrak{g}$ 的中心为 $\{0\}$ 而且 $\mathscr{D}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$.

第五章　半单李代数的 Cartan 分解及根系

§1. 半单李代数的 Cartan 分解

定理 1. 設 $\mathfrak{g}$ 是个半单李代数，$\mathfrak{h}$ 是它的一个 Cartan 子代数。設 $\dim \mathfrak{g} = r$，$\dim \mathfrak{h} = n$. 設

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \sum_{\alpha \in \Sigma}{}^{\cdot} \mathfrak{g}^{\alpha}$$

是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 分解，則

I) $\mathfrak{h}$ 是个交换子代数，而且 Killing 型对 $\mathfrak{h}$ 的限制是非退化的；

II) $\mathfrak{g}$ 有 n 个綫性无关的根，而且 $\mathfrak{g}$ 的根都是单根，即根子空間 $\mathfrak{g}^{\alpha}$ 都是一維的．再者，如果 $\alpha \in \Sigma$，則 $-\alpha \in \Sigma$；而且如果 $k \neq \pm 1$，則 $k\alpha \notin \Sigma$；

III) 如果 $\alpha + \beta$ 是根，則 $[\mathfrak{g}^{\alpha}, \mathfrak{g}^{\beta}] = \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$.

証。 我們依次証明以下諸事实.

1) $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型对 $\mathfrak{h}$ 的限制是非退化的.

設 $H \in \mathfrak{h}$. 由第三章 §1 知道，对一切 $\alpha \in \Sigma$，$(H, \mathfrak{g}^{\alpha}) = 0$. 如果还有 $(H, \mathfrak{h}) = 0$，則 $(H, \mathfrak{g}) = 0$，因之 $H = 0$. 这就証明了 Killing 型对 $\mathfrak{h}$ 的限制是非退化的.

2) 对任一 $\alpha \in \Sigma$，都唯一确定一个 $H_{\alpha} \in \mathfrak{h}$ 使

$$(H, H_{\alpha}) = \alpha(H)，对一切 H \in \mathfrak{h}.$$

实际上，每个 $H \in \mathfrak{h}$ 都确定 $\mathfrak{h}$ 上的一个綫性函数

$$\varphi_H(X) = (H, X)，对一切 X \in \mathfrak{h}.$$

因 Killing 型对 $\mathfrak{h}$ 的限制是非退化的，因此不同的 H 所确定的 φ_H 也不同。于是

$$H \to \varphi_H$$

就是从 $\mathfrak{h}$ 到 $\mathfrak{h}$ 的对偶空間 $\mathfrak{h}^*$ 上的，即定义在 $\mathfrak{h}$ 上的綫性函数所組成的空間上的一个同构. 于是 $\mathfrak{h}$ 上任一綫性函数，特别是根 $\alpha(H)$，皆可由 H 中的一个元素所确定.

3) $\mathfrak{g}$ 有 n 个綫性无关的根.

如果 $\mathfrak{g}$ 的綫性无关的根的个数 $< n$，就有 $H \in \mathfrak{h}$ 而 $H \neq 0$，使得对一切 $\varphi \in \Sigma$，$\varphi(H) = 0$. 于是

$$(H, H') = \sum_{\varphi \in \Sigma} \nu_\varphi \varphi(H)\varphi(H') = 0, \text{对一切 } H' \in \mathfrak{h}.$$

这与 Killing 型对 $\mathfrak{h}$ 的限制非退化相违.

4) $\mathfrak{h}$ 是交换子代数.

对任意 $H \in \mathscr{D}\mathfrak{h}$，根据第二章定理3的系理2，我們都有 $\varphi(H) = 0$ 对一切 $\varphi \in \Sigma$. 于是 $(H, \mathfrak{h}) = 0$，因之 $H = 0$. 这就証明了 $\mathscr{D}\mathfrak{h} = \{0\}$，即 $\mathfrak{h}$ 交换.

5) 如 $\alpha \in \Sigma$，則 $-\alpha \in \Sigma$.

实际上，如 $\alpha \in \Sigma$，而 $-\alpha \notin \Sigma$，則由第三章 §1 第2点知，对一切 $\varphi \in \Delta$，$(\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\varphi) = 0$. 因此，$(\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}) = 0$，这与 Killing 型非退化抵触.

6) 如 E_α 是 $\mathfrak{g}^\alpha$ 中的一个根向量，即 $\operatorname{ad} HE_\alpha = \alpha(H)E_\alpha$，对一切 $H \in \mathfrak{h}$，而 $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$，則

$$[E_\alpha, X_{-\alpha}] = (E_\alpha, X_{-\alpha})H_\alpha. \tag{1}$$

实际上，$[E_\alpha, X_{-\alpha}] \in \mathfrak{h}$，$H_\alpha \in \mathfrak{h}$，于是对任一 $H \in \mathfrak{h}$ 都有

$$\begin{aligned}([E_\alpha, X_{-\alpha}], H) &= -(X_{-\alpha}, [E_\alpha, H]) = (X_{-\alpha}, \alpha(H)E_\alpha)\\ &= \alpha(H)(E_\alpha, X_{-\alpha}) = (E_\alpha, X_{-\alpha})(H_\alpha, H)\\ &= ((E_\alpha, X_{-\alpha})H_\alpha, H).\end{aligned}$$

由此及 1) 即推出 (1) 式.

7) $\alpha(H_\alpha) \neq 0$ 对一切 $\alpha \in \Sigma$.

首先我們断言，有 $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ 使 $(E_\alpha, X_{-\alpha}) \neq 0$. 否則，$(E_\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}) = 0$，于是 $(E_\alpha, \mathfrak{g}) = 0$，这与 $\mathfrak{g}$ 的半单性相违. 因此有 $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ 使 $(E_\alpha, X_{-\alpha}) = 1$，于是

$$H_\alpha = [E_\alpha, X_{-\alpha}] \in [\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^{-\alpha}].$$

根据第四章引理 2，如 $\alpha(H_\alpha) = 0$，则对一切 $\varphi \in \Delta$, $\varphi(H_\alpha) = 0$. 于是

$$(H, H_\alpha) = \sum_{\varphi \in \Delta} v_\varphi \varphi(H) \varphi(H_\alpha) = 0,$$

对一切 $H \in \mathfrak{h}$. 这与 1) 相违，因此 $\alpha(H_\alpha) \neq 0$.

8) 設 $\alpha \in \Sigma$，則 $\dim \mathfrak{g}^\alpha = 1$，卽 α 都是单根.

假定 p 是最大正整数使 $-p\alpha$ 为根. 令 E_α 是相应于根 α 的一个根向量. 考察

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \{E_\alpha\} \dotplus \mathfrak{h} \dotplus \mathfrak{g}^{-\alpha} \dotplus \mathfrak{g}^{-2\alpha} \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{g}^{-p\alpha},$$

其中 $\{E_\alpha\}$ 表示由 E_α 生成的一維子空間. 据 7) 可选 $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ 使 $(E_\alpha, X_{-\alpha}) = 1$，因而据 6) 有 $[E_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$. 易見 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 在 $\operatorname{ad} E_\alpha$ 和 $\operatorname{ad} X_{-\alpha}$ 的作用下不变，因而也在 $\operatorname{ad} H_\alpha$ 的作用下不变. 一方面，我們有

$$\operatorname{Tr}_{\tilde{\mathfrak{g}}} \operatorname{ad} H_\alpha = \operatorname{Tr}_{\tilde{\mathfrak{g}}}(\operatorname{ad} E_\alpha \operatorname{ad} X_{-\alpha} - \operatorname{ad} X_{-\alpha} \operatorname{ad} E_\alpha) = 0.$$

另一方面，以 m_j 記 $\mathfrak{g}^{-j\alpha}$ 的維数，則

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}_{\tilde{\mathfrak{g}}} \operatorname{ad} H_\alpha &= \alpha(H_\alpha) - \alpha(H_\alpha) m_1 - \\ &\quad - 2\alpha(H_\alpha) m_2 - \cdots - p\alpha(H_\alpha) m_p \\ &= \alpha(H_\alpha)(1 - m_1 - 2m_2 - \cdots - p m_p).\end{aligned}$$

根据 7), $\alpha(H_\alpha) \neq 0$，因此 $1 - m_1 - 2m_2 - \cdots - p m_p = 0$. 由此推出 $m_1 = 1$, $m_2 = \cdots = m_p = 0$. 这証明了 $-\alpha$ 是单根，而 -2α, -3α, $\cdots$ 都不是根. 在以上討論中，以 $-\alpha$ 代 α，卽可証明 α 也是单根，而 2α, 3α, $\cdots$ 都不是根.

在上面的証明中我們也附带証明了

9) 如 $\alpha \in \Sigma$，則对任意整数 $k \neq \pm 1$，有 $k\alpha \notin \Sigma$.

显然我們也有

10) 設 $\alpha \in \Sigma$. 对任一根向量 $E_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$，总唯一确定一个根向量 $E_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ 使

$$(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1, \quad [E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha. \tag{2}$$

11) 在証明 III)之前，先証次之引理.

引理 1. 設 $\alpha\in\Sigma$, $\varphi\in\Delta$, 而 p 和 q 是非負整数使 $\varphi+k\alpha\in\Delta(-p\leqslant k\leqslant q)$, 而 $\varphi-(p+1)\alpha\notin\Delta$, $\varphi+(q+1)\alpha\notin\Delta$, 于是

$$\frac{2(H_\varphi, H_\alpha)}{(H_\alpha, H_\alpha)}=-(q-p),$$

而 $\varphi+k\alpha(k>q$ 或 $k<-p)$ 都不是根. 特别, $\varphi-2\frac{(H_\varphi, H_\alpha)}{(H_\alpha, H_\alpha)}\alpha\in\Delta$. 更进一步, 如 $\varphi\in\Sigma$, 而 E_φ, E_α, $E_{-\alpha}$ 是相应于根 φ, α, $-\alpha$ 的根向量, $[E_\alpha, E_{-\alpha}]=H_\alpha$ 而

$$(\mathrm{ad}\, E_\alpha)E_\varphi\neq 0,\ \cdots,\ (\mathrm{ad}\, E_\alpha)^{q'}E_\varphi\neq 0,$$
$$(\mathrm{ad}\, E_\alpha)^{q'+1}E_\varphi=0,$$
$$(\mathrm{ad}\, E_{-\alpha})E_\varphi\neq 0,\ \cdots,\ (\mathrm{ad}\, E_{-\alpha})^{p'}E_\varphi\neq 0,$$
$$(\mathrm{ad}\, E_{-\alpha})^{p'+1}E_\varphi=0,$$

则 $p=p'$, $q=q'$.

証. 如 $\varphi=\alpha$, 则根据 9), $p=2$, $q=0$; 如果 $\varphi=0$, 则 $p=1$, $q=1$; 如果 $\varphi=-\alpha$, 则 $p=0$, $q=2$. 在这三种情形, 引理 1 都成立. 除去这三种情形, 根据 9), 不論 k 是怎样的整数, $\varphi+k\alpha\neq 0$. 这时, $\mathfrak{g}^{\varphi+k\alpha}(-p\leqslant k\leqslant q)$ 都是一維的.

首先, 令 $\tilde{\mathfrak{g}}=\sum_{k=-p}^{q}\mathfrak{g}^{\varphi+k\alpha}$, 则 $\tilde{\mathfrak{g}}$ 是 ad $E_{-\alpha}$ 和 ad E_α 的不变子空間(因 $\varphi-(p+1)\alpha\notin\Delta$, $\varphi+(q+1)\alpha\notin\Delta$). 于是

$$0=\mathrm{Tr}_{\tilde{\mathfrak{g}}}[\mathrm{ad}\, E_\alpha, \mathrm{ad}\, E_{-\alpha}]=\mathrm{Tr}_{\tilde{\mathfrak{g}}}\,\mathrm{ad}\, H_\alpha=\sum_{k=-p}^{q}(\varphi+k\alpha)(H_\alpha)$$

$$=(p+q+1)\varphi(H_\alpha)+\frac{(p+q+1)(q-p)}{2}\alpha(H_\alpha).$$

因之

$$2\frac{(H_\varphi, H_\alpha)}{(H_\alpha, H_\alpha)}=2\frac{\varphi(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)}=-(q-p). \tag{3}$$

其次, 設 q' 是最大非負整数使 $(\mathrm{ad}\, E_\alpha)^k E_\varphi\neq 0$(对 $0\leqslant k\leqslant$

q')，于是 $\tilde{\mathfrak{g}}' = \sum_{k=-p}^{q'} \mathfrak{g}^{\varphi+k\alpha}$ 也是 ad $E_{-\alpha}$ 和 ad E_α 的不变子空間．仿上可得

$$\frac{2(H_\varphi, H_\alpha)}{(H_\alpha, H_\alpha)} = -(q' - p). \tag{4}$$

比較(3)和(4)两式，得 $q = q'$．同理，可証 p 是最大非負整数使 $(\mathrm{ad}\, E_{-\alpha})^k E_\varphi \neq 0$，对 $-p \leqslant k \leqslant 0$.

最后，令 q'' 是最大非負整数使 $\varphi + q''\alpha \in \Sigma$，則 $q'' \geqslant q$．設 $q'' > q$．令 $\varphi_0 = \varphi + q''\alpha$，以 p_0 和 q_0 表最大非負整数使 $\varphi_0 + k\alpha \in \Sigma$ $(-p_0 \leqslant k \leqslant q_0)$ 而 $\varphi_0 - (p_0 + 1)\alpha \notin \Delta$，$\varphi_0 + (q_0 + 1)\alpha \notin \Delta$．于是 $q_0 = 0$ 而 $p_0 < q'' - q - 1$．根据刚才所証明的，有 $\frac{2(H_{\varphi_0}, H_\alpha)}{(H_\alpha, H_\alpha)} = -(q_0 - p_0) = p_0 < q'' - q - 1$．但 $(H_{\varphi_0}, H_\alpha) = (H_\varphi, H_\alpha) + q''(H_\alpha, H_\alpha)$，因而又有 $\frac{2(H_{\varphi_0}, H_\alpha)}{(H_\alpha, H_\alpha)} = -(q - p) + 2q''$．于是 $-(q-p) + 2q'' < q'' - q - 1$，$q'' + p < -1$，矛盾．因之 $q'' = q$．同理可証 $\varphi + k\alpha (k < -p)$ 都不是根.

以后，我們把根鏈

$$\beta - p\alpha, \cdots, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \cdots, \beta + q\alpha$$

称为根 β 的 α-根鏈.

12）設 $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Sigma$，則 $[\mathfrak{g}^\alpha, \mathfrak{g}^\beta] = \mathfrak{g}^{\alpha+\beta}$.

这只要在引理 1 中取 $\beta = \varphi$ 卽得.

这样定理 1 就完全証明了.

系理.　設 $\mathfrak{g}$ 是半单李代数，$\mathfrak{h}$ 是它的一个 Cartan 子代数．对每个根 α，有一个唯一确定的 $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ 使

$$(H, H_\alpha) = \alpha(H),\ 对一切\ H \in \mathfrak{h}.$$

再对每对根 $\pm\alpha$ 选取 $E_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$，$E_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$ 使

$$(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1, \tag{5}$$

于是 $\mathfrak{g}$ 的結构公式可写作

$$[H, H'] = 0,\quad 对\ H, H' \in \mathfrak{h}$$

$$[H,\ E_\alpha] = \alpha(H)E_\alpha,\quad 对\ H\in\mathfrak{h}$$
$$[E_\alpha,\ E_{-\alpha}] = H_\alpha,\quad 对\ \alpha\in\Sigma$$
$$[E_\alpha,\ E_\beta] = 0,\quad 如\ \alpha+\beta\notin\Sigma$$
$$[E_\alpha,\ E_\beta] = N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta},\ N_{\alpha\beta}\neq 0\quad 如\ \alpha+\beta\in\Sigma.$$

注意根向量 E_α 的选取不是唯一的，但当 E_α 选定之后，满足条件(5)的根向量 $E_{-\alpha}$ 則是唯一确定的。

定理 2. 半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 可以用下列两个性質来刻划。

1° $\mathfrak{h}$ 是个极大交换子代数；

2° 对任意 $H\in\mathfrak{h}$, ad H 的初級因子都是单的，郎可在 $\mathfrak{g}$ 中选一組基，使 ad H 的矩陣都是对角形的。

証. $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数自然适合定理 2 中所說的两个性質。反之，設 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个子代数且适合性質 1° 和 2°，于是 $\mathfrak{h}$ 是个冪零子代数。考察 $\mathfrak{g}$ 在 ad$\mathfrak{h}$ 作用下的分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}\mathfrak{h}} + \sum_{\alpha\in\Sigma}\mathfrak{g}^\alpha_{\mathrm{ad}\mathfrak{h}},$$

Σ 是 $\mathfrak{g}$ 对于 $\mathfrak{h}$ 的非零根的全体。設有 $A\in\mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}\mathfrak{h}}$ 而 $A\notin\mathfrak{h}$. 由性質 2° 知，对一切 $H\in\mathfrak{h}$, $[H,\ A]=0$. 因此由 $\mathfrak{h}$ 及 A 的綫性組合所生成的子空間是个交换子代数，这与 $\mathfrak{h}$ 的极大性相违。因此 $\mathfrak{g}^0_{\mathrm{ad}\mathfrak{h}}=\mathfrak{h}$. 这就是說，$\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数。

在証明过程中我們見到，条件 2° 可減弱为

2°′ 对任意 $H\in\mathfrak{h}$，相应于 ad H 的特征根零的初級因子都是单的。

基于第三章定理 3，可将定理 2 改进成

定理 2′. 半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 是具有以下两个性質的子代数中的一个极大者。

1° $\mathfrak{h}$ 是个交換子代数。

2° 对任意 $H\in\mathfrak{h}$, ad H 的初級因子都是单的。

証. $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 自然是具有性質 1° 与 2° 的子代

数的一个极大者.

反之,設 $\mathfrak{h}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个具有性質 1° 与 2° 的一个子代数,我們来証明 $\mathfrak{h}_1$ 一定可以包在 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数中. 特别由此即推出 $\mathfrak{g}$ 的具有性質 1° 与 2° 的子代数中的一个极大者一定是 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数. 令

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{h}_1) = \{X \in \mathfrak{g} \text{ 使 } [X, \mathfrak{h}_1] = 0\},$$

称为 $\mathfrak{h}_1$ 在 $\mathfrak{g}$ 中的中心化子. 易証 $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}_1)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个子代数. 以 $\mathfrak{h}$ 表 $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}_1)$ 的一个 Cartan 子代数, 設 $H_1 \in \mathfrak{h}_1$, 則对一切 $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h}_1)$, $[X_1, H_1] = 0$. 特别 $[\mathfrak{h}, H_1] = 0$. 因 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}_1)$ 的一个极大冪零子代数, 故 $H_1 \in \mathfrak{h}$. 这証明了 $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}$. 剩下来还需要証明 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数. 我們来証明 $\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. 設

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{h}_1) + \sum_{\alpha_i \neq 0} \mathfrak{g}^{\alpha_i}_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}_1}$$

是 $\mathfrak{g}$ 相对于 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}_1$ 的权子空間分解. 对 $X \in \mathfrak{g}$, 有

$$X = Z + \sum_i X_i, \quad Z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h}_1), \quad X_i \in \mathfrak{g}^{\alpha_i}_{\mathrm{ad}\,\mathfrak{h}_1}.$$

設 $X \in \mathfrak{n}(\mathfrak{h})$, 即 $[X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$, 則对 $H_1 \in \mathfrak{h}_1$,

$$[H_1, X] = \sum_i \alpha_i(H_1) X_i \in \mathfrak{h}.$$

但可选 H_1 使 $\alpha_i(H_1) \neq 0$, 于是由上式导出 $X_i = 0$. 因此 $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{h}_1)$. 但 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}_1)$ 的 Cartan 子代数, 根据第三章定理 3, 它在 $\mathfrak{z}(\mathfrak{h}_1)$ 中的正規化子是它自身, 故由 $[X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ 导出 $X \in \mathfrak{h}$. 这証明了 $\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. 再根据第三章定理 3 知, $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数.

§2. 半单李代数的根系

設 $\mathfrak{g}$ 是个半单李代数, $\mathfrak{h}$ 是它的一个 Cartan 子代数. 以 Σ 表示 $\mathfrak{g}$ 的根的全体,称为根系. 任一 $\alpha \in \Sigma$ 都唯一地确定一个 $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ 使

$$(H, H_\alpha) = \alpha(H) \quad \text{对一切 } H \in \mathfrak{h}.$$

給了 α, 确定 H_α 的手續我們簡称将根 α 嵌入 $\mathfrak{h}$. 更一般地, 以 $\mathfrak{h}^*$ 表示 $\mathfrak{h}$ 的对偶空間,如果 $\mu\in\mathfrak{h}^*$, 那么也能唯一确定一个 $H_\mu\in\mathfrak{h}$ 使

$$(H, H_\mu)=\mu(H) \quad 对一切\ H\in\mathfrak{h}.$$

我們也說这是将 $\mathfrak{h}$ 上的綫性函数 μ 嵌入 $\mathfrak{h}$.

現在設 $\lambda, \mu\in\mathfrak{h}^*$, 将它們嵌入 $\mathfrak{h}$ 后分別得 H_λ 和 H_μ. 定义

$$(\lambda, \mu)=(H_\lambda, H_\mu),$$

这就在 $\mathfrak{h}^*$ 中引进了一个內积, 自然 $\mathfrak{h}^*$ 对于这个內积而言是非退化的. 显然有

$$(\lambda, \mu)=(H_\lambda, H_\mu)=\lambda(H_\mu)=\mu(H_\lambda).$$

有时我們为方便起見, 将 $\lambda\in\mathfrak{h}^*$ 与 $H_\lambda\in\mathfrak{h}$ 視为同一而不加区別,因此我們也記

$$(\lambda, \mu)=(\lambda, H_\mu)=(H_\mu, \lambda)=(H_\lambda, \mu)=(\mu, H_\lambda).$$

定理 3. 以 $\mathfrak{h}_0^*$ 表示半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的对偶空間中一切可表成形状

$$\sum_{\varphi\in\Sigma} a_\varphi\varphi \quad (a_\varphi\ 是实数)$$

的向量的集合,則 1) $\mathfrak{h}_0^*$ 是个实向量空間, 它的实維数等于 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的复維数, 2) $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 內积誘导出 $\mathfrak{h}_0^*$ 的一个欧氏尺度, 3) 設 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是 n 个綫性无关的根, 則任一 $\varphi\in\Sigma$ 皆可表成它們的有理系数的綫性組合.

証. 設 $H\in\mathfrak{h}$, 則

$$(H, H)=\sum_{\varphi\in\Sigma}\varphi(H)^2=\sum_{\varphi\in\Sigma}(H, H_\varphi)^2=\sum_{\varphi\in\Sigma}(H,\varphi)^2. \quad (1)$$

我們先証 (φ, α) 是有理数. 根据引理 1,

$$(\varphi, \alpha)=-\frac{1}{2}(q_{\varphi,\alpha}-p_{\varphi,\alpha})(\alpha, \alpha), \quad (2)$$

$q_{\varphi,\alpha}$ 和 $p_{\varphi,\alpha}$ 是非負整数. 于是由(1)及(2)知

$$(\alpha, \alpha)=\sum_{\varphi\in\Sigma}(\alpha, \varphi)^2=\frac{1}{4}\sum_{\varphi\in\Sigma}(q_{\varphi,\alpha}-p_{\varphi,\alpha})^2(\alpha, \alpha)^2.$$

由于 $(\alpha, \alpha)\neq 0$, 故

$$(\alpha, \alpha) = \frac{4}{\sum_{\varphi\in\Sigma}(q_{\varphi,\alpha} - p_{\varphi,\alpha})^2}. \tag{3}$$

将(3)代入(2)就知 (φ, α) 是有理数。

設 $\mu = \sum_{\alpha\in\Sigma} a_\alpha\alpha$（$a_\alpha$ 为实数），則由(1)知

$$(\mu, \mu) = \sum_{\varphi\in\Sigma}\left(\sum_{\alpha\in\Sigma} a_\alpha\alpha, \varphi\right)^2 = \sum_{\varphi\in\Sigma}\left(\sum_{\alpha\in\Sigma} a_\alpha(\varphi, \alpha)\right)^2.$$

于是 $(\mu, \mu) \geqq 0$。如 $(\mu, \mu) = 0$，則 $(\mu, \varphi) = \left(\sum_{\alpha\in\Sigma} a_\alpha\alpha, \varphi\right) = 0$ 对一切 $\varphi \in \Sigma$。因 $\mathfrak{g}$ 有 n 个在复数域上綫性无关的根，故 $(\mu, \mathfrak{h}) = 0$。因之 $\mu = 0$。这証明了 Killing 型决定了 $\mathfrak{h}_0^*$ 上的一个欧氏尺度。

設 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是 n 个在复数域上綫性无关的根。設 $\varphi \in \Sigma$，則

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i\alpha_i, \tag{4}$$

其中 a_i 是复数，而且是唯一确定的。問題是証明 a_i 是有理数。将 α_k $(1 \leqslant k \leqslant n)$ 与上式双方做內积，就有

$$(\varphi, \alpha_k) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\alpha_i, \alpha_k) \quad (1 \leqslant k \leqslant n). \tag{5}$$

将(5)看作 a_i 的綫性方程組，其行列式

$$|(\alpha_i, \alpha_k)|_{1\leqslant i,k\leqslant n} \neq 0,$$

故 a_i 的值由(5)唯一确定。因(5)的系数是有理数，故 a_i 都是有理数。由此也推出，$\mathfrak{h}_0^*$ 的实維数是 n。定理 3 証毕。

对偶地，如以 $\mathfrak{h}_0$ 表 $\mathfrak{h}$ 中一切可表成 H_α $(\alpha \in \Sigma)$ 的实系数綫性組合的向量所成之实綫性空間，則 $\mathfrak{h}_0$ 是 $\mathfrak{h}_0^*$ 的对偶空間而 Killing 型对 $\mathfrak{h}_0$ 的限制給出 $\mathfrak{h}_0$ 的一个欧氏尺度。

根据以上的討論我們知道，半单李代数 $\mathfrak{g}$ 对它的一个 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的根系 Σ 是 n 維欧氏空間中的一个向量集，具以下性质：

1° 如 $\alpha\in\Sigma$，则 $-\alpha\in\Sigma$；但如 $k\neq\pm1$，则 $k\alpha\notin\Sigma$.

2° 设 $\alpha,\beta\in\Sigma$，$\alpha\neq\pm\beta$. 以 p 和 q 表最大非负整数使 $\beta+k\alpha\in\Sigma(-p\leqslant k\leqslant q)$，则

$$2\frac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=-(q-p).$$

一般地，欧氏空间中的一个非零向量的非空集合 Σ，如具有性质 1° 与 2°，就称为一个 σ 系. 自然，根系是 σ 系.

关于 σ 系 Σ，根据引理 1 的证明，我们有以下简单性质：

3° 设 $\alpha,\beta\in\Sigma$，则 $\beta-\dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha\in\Sigma$；

4° 设 $\alpha,\beta\in\Sigma$，$\alpha\neq\pm\beta$. 以 p 和 q 表最大非负整数使 $\beta+k\alpha\in\Sigma(-p\leqslant k\leqslant q)$，则 $\beta+k\alpha\notin\Sigma$，如 $k>q$ 或 $k<-p$.

更进一步我们有

定理 4. 设 Σ 是个 σ 系，$\alpha,\beta\in\Sigma$ 而 $\alpha\neq\pm\beta$. 令 $\langle\alpha,\beta\rangle$ 表 α 与 β 的夹角，那么

$$\cos\langle\alpha,\beta\rangle=\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{r},\ \varepsilon=\pm1,\ r=0,1,2,3.$$

如果再设 $(\alpha,\alpha)\leqslant(\beta,\beta)$，那么当 $r\neq0$ 时，

$$\frac{(\beta,\beta)}{(\alpha,\alpha)}=r,$$

$$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}=\varepsilon r,\quad \frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}=\varepsilon;$$

而当 $r=0$ 时

$$\frac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}=\frac{2(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}=0.$$

证. 我们有

$$4\cos^2\langle\alpha,\beta\rangle=4\frac{(\alpha,\beta)^2}{(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)}=2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}\cdot2\frac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)},$$

因之 $4\cos^2\langle\alpha,\beta\rangle$ 是整数. 又因 $\cos^2\langle\alpha,\beta\rangle<1$，故

$$4\cos^2\langle\alpha,\beta\rangle=0,1,2,3.$$

設

$$\cos\langle\alpha, \beta\rangle = \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{r}, \ r = 0, 1, 2, 3.$$

因 $(\alpha, \alpha) \leqslant (\beta, \beta)$，故

$$\frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \geqslant \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)}.$$

于是当 $r \neq 0$ 时就有

$$\frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = \varepsilon r, \quad \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} = \varepsilon, \ \frac{(\beta, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = r,$$

而当 $r = 0$ 时，自然有

$$\frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} = \frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} = 0.$$

定理 4 有下面这个重要推論.

系理.　σ 系中的元素个数有限.

証.　設 Σ 是 σ 系.　因 Σ 中任意二向量的夹角皆取离散值，故单位球上的集合

$$\left\{\frac{\alpha}{(\alpha, \alpha)^{1/2}} \middle| \alpha \in \Sigma\right\}$$

不能有极限点，因而是有限集.　因之 Σ 是有限集.

σ 系的一个非空子集称为一个子 σ 系，如果这个子集也满足条件 $1°$ 和 $2°$.

設 Σ 是个 σ 系.　如果 Σ_1 和 Σ_2 是 Σ 的两个非空子集，具有性質：$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$，而且 $(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ 对任意 $\alpha_1 \in \Sigma_1$，$\alpha_2 \in \Sigma_2$，則易証这时 Σ_1 和 Σ_2 一定是子 σ 系，而我們說 Σ 分解成了两个互相正交的子 σ 系的併.　如 Σ 不可分解，就称 Σ 是单 σ 系.

定理 5.　設 $\mathfrak{g}$ 是半单李代数，$\mathfrak{h}$ 是它的一个 Cartan 子代数，而 Σ 是 $\mathfrak{g}$ 的相应于 $\mathfrak{h}$ 的根系.　設 $\mathfrak{g}$ 是两个非零半单理想 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 的直和，将 $\mathfrak{h}$ 写成 $\mathfrak{g}_1$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}_2$ 的直和.　設 Σ_i 是 $\mathfrak{g}_i$ 的相应于 $\mathfrak{h}_i$ 的根系 $(i = 1, 2)$.　$\mathfrak{g}_i$ 的每一个根 α_i 可以自然地看作定义在 $\mathfrak{h}$ 上的綫性函数

$$\alpha_i(H)=\alpha_i(H_i),\text{ 如 }H=H_1+H_2,\ H_i\in\mathfrak{h}_i.$$

这样每个 $\alpha_i\in\Sigma_i$ 都是 $\mathfrak{g}$ 对于 $\mathfrak{h}$ 的根，而且 Σ 分解成了互相正交的子 σ 系 Σ_1 和 Σ_2 的併。

証。 先証每个 $\alpha_i\in\Sigma_i$ 都是 $\mathfrak{g}$ 对于 $\mathfrak{h}$ 的根。設 $E_{\alpha_i}\in\mathfrak{g}_i$ 是相应于 α_i 的根向量 $(i=1,2)$，即

$$[H_i,E_{\alpha_i}]=\alpha_i(H_i)E_{\alpha_i}.$$

設 $H\in\mathfrak{h}$，写 $H=H_1+H_2$，則

$$[H,E_{\alpha_i}]=[H_i,E_{\alpha_i}]=\alpha_i(H_i)E_{\alpha_i}=\alpha_i(H)E_{\alpha_i}.$$

这样 α_i 就是 $\mathfrak{g}$ 对于 $\mathfrak{h}$ 的根，而 E_{α_i} 仍是 α_i 的根向量。

其次証明：如 $\alpha_i\in\Sigma_1$，$\alpha_2\in\Sigma_2$，則 $(\alpha_1,\alpha_2)=0$。我們有 $H_{\alpha_i}\in\mathfrak{h}_i$ 使

$$(H_i,H_{\alpha_i})=\alpha_i(H_i),\quad i=1,2.$$

如果 $H=H_1+H_2\in\mathfrak{h}$，則

$$(H,H_{\alpha_i})=(H_i,H_{\alpha_i})=\alpha_i(H)=\alpha_i(H_i),\quad i=1,2.$$

因之

$$(\alpha_1,\alpha_2)=(H_{\alpha_1},H_{\alpha_2})=\alpha_1(H_{\alpha_2})=0.$$

最后証明 $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2$. 設 $\alpha\in\Sigma$，而 E_α 是相应于 α 的根向量。写 $E_\alpha=E_1+E_2$，$E_1\in\mathfrak{g}_1$，$E_2\in\mathfrak{g}_2$，于是对任意 $H\in\mathfrak{h}$，就有

$$\begin{aligned}[H,E_\alpha]&=\alpha(H)E_\alpha=\alpha(H)E_1+\alpha(H)E_2\\&=[H,E_1+E_2]=[H,E_1]+[H,E_2].\end{aligned}$$

由于 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\dot{+}\mathfrak{g}_2$，故

$$[H,E_i]=\alpha(H)E_i,\quad i=1,2.$$

因之 $E_i\in\mathfrak{g}^\alpha(i=1,2)$。由于 $\mathfrak{g}^\alpha$ 是一維的，故 E_1 和 E_2 綫性相关。由于 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\dot{+}\mathfrak{g}_2$，故 $E_1=0$ 或 $E_2=0$。因此 $E_\alpha\in\mathfrak{g}_1$ 或 $E_\alpha\in\mathfrak{g}_2$。如 $E_\alpha\in\mathfrak{g}_1$，則 $\alpha\in\Sigma_1$；如 $E_\alpha\in\mathfrak{g}_2$，則 $\alpha\in\Sigma_2$。因此 $\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2$.

定理 5'. 設 $\mathfrak{g}$ 是半单李代数，$\mathfrak{h}$ 是它的一个 Cartan 子代数，而 Σ 是 $\mathfrak{g}$ 的相应于 $\mathfrak{h}$ 的根系。設 Σ 分解成两个正交的子集 Σ_1 和 Σ_2 的併，則 $\mathfrak{g}$ 就相应地分解成两个理想 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 的直和，$\mathfrak{h}$ 相应地分解成 $\mathfrak{g}_1$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}_2$ 的直和，

而 Σ_i 对 $\mathfrak{h}_i$ 的限制是 $\mathfrak{g}_i$ 对 $\mathfrak{h}_i$ 的根系 $(i=1,2)$.

証. 令

$$\mathfrak{h}_1=\{H_1|H_1\in\mathfrak{h}\ \ 使得\ \alpha_2(H_1)=0,\ 对一切\ \alpha_2\in\Sigma_2\},$$
$$\mathfrak{h}_2=\{H_2|H_2\in\mathfrak{h}\ \ 使得\ \alpha_1(H_2)=0,\ 对一切\ \alpha_1\in\Sigma_1\}.$$

我們断言 $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_1\dotplus\mathfrak{h}_2$. 实际上, 自然有 $\mathfrak{h}_1\cap\mathfrak{h}_2=\{0\}$, 因 $\mathfrak{h}$ 含 n 个綫性无关的根. 其次, 因 Σ_1 和 Σ_2 正交, 設 n_i 是 Σ_i 中所含的綫性无关的根的个数 $(i=1,2)$, 則 $n=n_1+n_2$, 而且 $\dim\mathfrak{h}_i=n_i\,(i=1,2)$. 因此 $\mathfrak{h}=\mathfrak{h}_1\dotplus\mathfrak{h}_2$.

其次置

$$\mathfrak{g}_i=\mathfrak{h}_i+\left\{\sum_{\alpha_i\in\Sigma_i}a_{\alpha_i}E_{\alpha_i}\middle|a_{\alpha_i}\ 复,\ E_{\alpha_i}\ 是相应于\ \alpha_i\ 的根向量\right\},$$
$$(i=1,2).$$

易見 $\mathfrak{g}$ 是向量子空間 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 的直和. 我們来証明 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 实际上, 設 $H\in\mathfrak{h}$, 写 $H=H_1+H_2$, $H_1\in\mathfrak{h}_1$, $H_2\in\mathfrak{h}_2$, 則

$$\left.\begin{aligned}&[H,\mathfrak{h}_1]=0,\\&[H,E_{\alpha_1}]=\alpha_1(H)E_{\alpha_1}=\alpha_1(H_1)E_{\alpha_1}\ 对\ \alpha_1\in\Sigma_1.\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

因此 $[\mathfrak{h},\mathfrak{g}_1]\subset\mathfrak{g}_1$. 又如 $\alpha_1,\beta_1\in\Sigma_1$, 則 $\alpha_1+\beta_1\notin\Sigma_2$; 否則, 如 $\alpha_1+\beta_1\in\Sigma_2$, 則从

$$(\alpha_1,\alpha_1+\beta_1)=(\beta_1,\alpha_1+\beta_1)=0$$

推出

$$(\alpha_1+\beta_1,\alpha_1+\beta_1)=0,$$

于是 $\alpha_1+\beta_1=0$, 这与 $\alpha_1+\beta_1\in\Sigma_2$ 相抵触. 因此, 如 $\alpha_1,\beta_1\in\Sigma_1$ 而 $\alpha_1+\beta_1\in\Sigma$, 則 $\alpha_1+\beta_1\in\Sigma_1$ 而且

$$[E_{\alpha_1},E_{\beta_1}]=N_{\alpha_1\beta_1}E_{\alpha_1+\beta_1}\in\mathfrak{g}_1.$$

又,設 $\alpha_1\in\Sigma_1$, 由于 Σ_1 与 Σ_2 正交,故 $-\alpha_1\in\Sigma_1$. 令 $[E_{\alpha_1},E_{-\alpha_1}]=H_{\alpha_1}$, 則

$$\alpha_2(H_{\alpha_1})=(\alpha_2,\alpha_1)=0,\ 对一切\ \alpha_2\in\Sigma_2.$$

因此 $H_{\alpha_1}\in\mathfrak{h}_1$. 最后, 如 $\alpha_1\in\Sigma_1$, $\alpha_2\in\Sigma_2$, 則 $\alpha_1+\alpha_2\notin\Sigma$; 否則, 如 $\alpha_1+\alpha_2\in\Sigma_1$, 則 $(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2)=0$. 因 $(\alpha_2,\alpha_2)\neq0$, 故 $(\alpha_1,\alpha_2)\neq0$,

此为不可能. 于是

$$[E_{\alpha_1}, E_{\alpha_2}] = 0.$$

这就証明了 $\mathfrak{g}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 同理可証 $\mathfrak{g}_2$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 于是我們有 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \dotplus \mathfrak{g}_2$. 又从(6)式可見, $\mathfrak{h}_1$ 是 $\mathfrak{g}_1$ 的 Cartan 子代数, 而 Σ_1 对 $\mathfrak{h}_1$ 的限制是 $\mathfrak{g}_1$ 对 $\mathfrak{h}_1$ 的根系. 同样, $\mathfrak{h}_2$ 是 $\mathfrak{g}_2$ 的 Cartan 子代数, 而 Σ_2 对 $\mathfrak{h}_2$ 的限制是 $\mathfrak{g}_2$ 对 $\mathfrak{h}_2$ 的根系.

定理 5′ 証毕.

系理. 半单李代数 $\mathfrak{g}$ 是单代数, 当且仅当 $\mathfrak{g}$ 的根系 Σ 是单 σ 系.

§3. 半单李代数的結构对根系的依賴性

設 S 和 S' 各是欧氏空間 R 和 R' 中的向量集. 我們說 S 和 S' 合同, 如果在 S 和 S' 之間可以建立一个一一对应:

$$S \ni \alpha \to f(\alpha) \in S',$$

使得

$$(f(\alpha), f(\beta)) = (\alpha, \beta), \text{ 对一切 } \alpha, \beta \in S.$$

我們說 S 和 S' 相似, 如果在 S 与 S' 之間可以建立一个一一对应:

$$S \ni \alpha \to f(\alpha) \in S',$$

使得

$$(f(\alpha), f(\beta)) = k^2(\alpha, \beta), \text{ 对一切 } \alpha, \beta \in S,$$

其中 k 是正实数. k 称为相似系数. 易見, 相似系数为 1 的相似向量集一定合同. 对于根系的相似, 我们有

引理 2. 設 Σ 是半单李代数 $\mathfrak{g}$ 对于它的一个 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的根系, 再設 Σ' 是半单李代数 $\mathfrak{g}'$ 对于它的一个 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}'$ 的根系. 如果 Σ 和 Σ' 相似, 則 Σ 和 Σ' 一定合同.

証. 我們有, 对一切 $\beta \in \Sigma$,

$$(\beta, \beta) = \sum_{\alpha \in \Sigma} (\alpha, \beta)^2$$

及

$$(f(\beta), f(\beta)) = \sum_{f(\alpha)\in\Sigma'} (f(\alpha), f(\beta))^2.$$

設相似系数为 k，则

$$(f(\beta), f(\beta)) = k^2(\beta, \beta) = k^2 \sum_{\alpha\in\Sigma} (\alpha, \beta)^2,$$

$$\sum_{f(\alpha)\in\Sigma'} (f(\alpha), f(\beta))^2 = \sum_{\alpha\in\Sigma} k^4(\alpha, \beta)^2 = k^4 \sum_{\alpha\in\Sigma} (\alpha, \beta)^2.$$

因此 $k^2 = 1$, $k = 1$. 这就是說 Σ 与 Σ' 合同.

引理 3. 設 $\mathfrak{g}$ 是半单李代数，$\mathfrak{h}$ 是它的一个 Cartan 子代数，Σ 是 $\mathfrak{g}$ 对于 $\mathfrak{h}$ 的根系. 对 $\alpha\in\Sigma$，选 $E_\alpha\in\mathfrak{g}^\alpha$ 使 $(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$. 如 $\alpha+\beta\neq 0$，令

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta},$$

于是

i) 如 $\alpha, \beta\in\Sigma$ 而 $\alpha+\beta\neq 0$，则

$$N_{\alpha\beta} = -N_{\beta\alpha}.$$

ii) 如 $\alpha, \beta, \gamma\in\Sigma$, $\alpha+\beta+\gamma = 0$（这时說 α, β, γ 組成三角形），则

$$N_{\alpha\beta} = N_{\beta\gamma} = N_{\gamma\alpha}.$$

iii) 如 $\alpha, \beta, \gamma, \delta\in\Sigma$, $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 0$（这时說 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 組成四边形），而 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 之中任意两个之和皆不为 0，则

$$N_{\alpha\beta}N_{\gamma\delta} + N_{\alpha\gamma}N_{\delta\beta} + N_{\alpha\delta}N_{\beta\gamma} = 0.$$

iv) 設 $\alpha, \beta\in\Sigma$, $\alpha+\beta\neq 0$. 令 p, q 为最大非負整数使 $\beta + k\alpha(-p\leqslant k\leqslant q)$ 都是根，则

$$N_{\alpha\beta}N_{-\alpha-\beta} = -R_{\alpha\beta} = -\frac{q(p+1)}{2}(\alpha, \alpha).$$

于是 $R_{\alpha\beta} > 0$ 而且如 Σ 已知，$R_{\alpha\beta}$ 可唯一算出.

證. i) 是显然的. 今証 ii). 因 $\alpha+\beta = -\gamma$，故 $\alpha+\beta$ 一定是根. 同理，$\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha\in\Sigma$. 从

$$([E_\alpha, E_\beta], E_\gamma) + (E_\beta, [E_\alpha, E_\gamma]) = 0$$

及

$$([E_\alpha, E_\beta], E_\gamma) = N_{\alpha\beta}(E_{-\gamma}, E_\gamma) = N_{\alpha\beta},$$
$$(E_\beta, [E_\alpha, E_\gamma]) = N_{\alpha\gamma}(E_\beta, E_{-\beta}) = N_{\alpha\gamma}$$

推出 $N_{\alpha\beta} + N_{\alpha\gamma} = 0$. 再根据 i) 有 $N_{\alpha\beta} = N_{\gamma\alpha}$. 同理可証 $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\gamma}$.

現在来証 iii). 我們有 Jacobi 恆等式

$$[E_\alpha, [E_\beta, E_\gamma]] + [E_\beta, [E_\gamma, E_\alpha]] + [E_\gamma, [E_\alpha, E_\beta]] = 0.$$

如果 $\beta + \gamma \in \Sigma$, 則 α, $\beta + \gamma$, δ 都属于 Σ. 于是

$$[E_\alpha, [E_\beta, E_\gamma]] = N_{\beta\gamma}[E_\alpha, E_{\beta+\gamma}] = N_{\beta\gamma}N_{\alpha,\beta+\gamma}E_{\alpha+\beta+\gamma}.$$

再根据 ii) 就有

$$[E_\alpha, [E_\beta, E_\gamma]] = N_{\beta\gamma}N_{\delta\alpha}E_{-\delta}. \tag{1}$$

如果 $\beta + \gamma \notin \Sigma$, 則 $[E_\beta, E_\gamma] = 0$ 及 $N_{\beta\gamma} = 0$, 所以这时 (1) 式仍成立. 于是有

$$[E_\alpha, [E_\beta, E_\gamma]] = -N_{\alpha\delta}N_{\beta\gamma}E_{-\delta}.$$

同理有

$$[E_\beta, [E_\gamma, E_\alpha]] = -N_{\beta\delta}N_{\gamma\alpha}E_{-\delta},$$
$$[E_\gamma, [E_\alpha, E_\beta]] = -N_{\gamma\delta}N_{\alpha\beta}E_{-\delta}.$$

将以上三式相加,利用 Jacobi 恆等式,即推出 iii).

最后我們来証 iv). 如 $\alpha + \beta \notin \Sigma$, 則 $N_{\alpha\beta} = 0$ 而且 $q = 0$. 因此这时 iv) 成立. 以下設 $\alpha + \beta \in \Sigma$, 我們写出根 β 的 α 根鏈:

$$\beta - p\alpha, \cdots, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \cdots, \beta + q\alpha.$$

以 X_0 表相应于根 $\beta - p\alpha$ 的一个根向量. 令

$$X_1 = (\mathrm{ad}\, E_\alpha)X_0,\ X_2 = (\mathrm{ad}\, E_\alpha)X_1, \cdots,$$
$$X_k = (\mathrm{ad}\, E_\alpha)X_{k-1}, \cdots,$$

則 X_k 是相应于根 $\beta - p\alpha + k\alpha$ 的根向量. 我們有

$$(\mathrm{ad}\, E_{-\alpha})X_0 = 0.$$

用归納法可証

$$(\mathrm{ad}\, E_{-\alpha})X_{k+1} = \frac{(k+1)(q+p-k)}{2}(\alpha, \alpha)X_k. \tag{2}$$

实际上，当 $k=-1$ 时，(2)式成立. 設(2)式对 $k\geqslant -1$ 成立，则

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{ad}\,E_{-\alpha})X_{k+2} &= \mathrm{ad}\,E_{-\alpha}\,\mathrm{ad}\,E_{\alpha}X_{k+1}\\
&= -\mathrm{ad}\,H_{\alpha}X_{k+1} + \mathrm{ad}\,E_{\alpha}\,\mathrm{ad}\,E_{-\alpha}X_{k+1}\\
&= -(\beta - p\alpha + (k+1)\alpha, \alpha)X_{k+1}\\
&\quad + \mathrm{ad}\,E_{\alpha}\frac{(k+1)(q+p-k)}{2}(\alpha,\alpha)X_k\\
&= \Big\{-(\beta,\alpha) + (p-k-1)(\alpha,\alpha) +\\
&\quad + \frac{(k+1)(q+p-k)}{2}(\alpha,\alpha)\Big\}X_{k+1}\\
&= \Big\{\frac{q-p}{2} + p - k - 1 + \frac{(k+1)(q+p-k)}{2}\Big\}(\alpha,\alpha)X_{k+1}\\
&= \frac{(k+2)(q+p-k-1)}{2}(\alpha,\alpha)X_{k+1}.
\end{aligned}
$$

因之(2)式对 $k+1$ 也成立. (2)式又可改写作

$$
\mathrm{ad}\,E_{-\alpha}\,\mathrm{ad}\,E_{\alpha}X_k = \frac{(k+1)(q+p-k)}{2}(\alpha,\alpha)X_k.
$$

特别

$$
\mathrm{ad}\,E_{-\alpha}\,\mathrm{ad}\,E_{\alpha}X_p = \frac{(p+1)q}{2}(\alpha,\alpha)X_p.
$$

因 X_p 和 E_β 頂多差一个常数因子，故

$$
[E_{-\alpha},[E_{\alpha},E_{\beta}]] = \frac{q(p+1)}{2}(\alpha,\alpha)E_{\beta}, \tag{3}
$$

但是

$$
[E_{-\alpha},[E_{\alpha},E_{\beta}]] = N_{\alpha\beta}N_{-\alpha,\alpha+\beta}E_{\beta},
$$

再根据 ii)

$$
[E_{-\alpha},[E_{\alpha},E_{\beta}]] = -N_{\alpha\beta}N_{-\alpha,-\beta}E_{\beta}. \tag{4}
$$

比較(3)，(4)两式，即得断言 iv).

至此，引理 3 完全証完.

設 $\mathfrak{g}$ 是半单李代数，$\mathfrak{h}$ 是它的一个 Cartan 子代数，Σ 为由 $\mathfrak{h}$ 所

确定的根系．对于每个 $\alpha\in\Sigma$，可以选 $E_\alpha\in\mathfrak{g}^\alpha$ 使

$$(E_\alpha, E_{-\alpha})=1.$$

同时，对每个 $\alpha\in\Sigma$，可以选一个唯一确定的 $H_\alpha\in\mathfrak{h}$ 使

$$(H, H_\alpha)=\alpha(H),\ 对一切\ H\in\mathfrak{h}.$$

这时 $\mathfrak{g}$ 的結构公式如下：

$$[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]=0,$$
$$[H, E_\alpha]=\alpha(H)E_\alpha,$$
$$[E_\alpha, E_{-\alpha}]=H_\alpha,$$
$$[E_\alpha, E_\beta]=N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta},\ 如\ \alpha+\beta\neq 0.$$

我們知道 H_α 是唯一确定的，但 E_α 則未必．設

$$E'_\alpha=\mu_\alpha E_\alpha,$$

其中 μ_α 是非零复数且滿足

$$\mu_\alpha\mu_{-\alpha}=1,$$

則亦有

$$(E'_\alpha, E'_{-\alpha})=1.$$

这时，如 $\alpha+\beta\neq 0$，令

$$[E'_\alpha, E'_\beta]=N'_{\alpha\beta}E'_{\alpha+\beta},$$

那么

$$N'_{\alpha\beta}=\frac{\mu_\alpha\mu_\beta}{\mu_{\alpha+\beta}}N_{\alpha\beta},\ 对一切\ \alpha,\beta\in\Sigma\ 而\ \alpha+\beta\in\Sigma.$$

数組 $\{N_{\alpha\beta}\}$ 和 $\{N'_{\alpha\beta}\}$ 对一切 $\alpha,\beta\in\Sigma$，而 $\alpha+\beta\in\Sigma$ 如适合上述关系，其中 $\mu_\alpha\mu_{-\alpha}=1$，就称为**等价**．

定理 6[1]． 設 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}'$ 是两个半单李代数．Σ 和 Σ' 分别是它們相应于各自的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{h}'$ 的根系． 如果 Σ 和 Σ' 相似，則 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}'$ 同构．更进一步，可将 Σ 和 Σ' 之間的相似(当然是合同)扩展成 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}'$ 之間的同构．

---

1) H. Weyl, Theorie der Darstellung Kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen. I, II, III, *Math. Zeit.*, **23** (1925), 271—309; **24** (1926), 328—376; **24** (1926), 377—395.

証. 为书写簡单起見，不妨設 $\Sigma = \Sigma'$。因 $\mathfrak{h}$（及 $\mathfrak{h}'$）的維数是 Σ 中綫性无关向量的最大数，故 $\dim \mathfrak{h} = \dim \mathfrak{h}'$.

对于每个 α，有唯一确定的 $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ 和 $H'_\alpha \in \mathfrak{h}'$，使

$$(H, H_\alpha) = \alpha(H), \quad \text{对一切 } H \in \mathfrak{h},$$
$$(H', H'_\alpha) = \alpha(H'), \quad \text{对一切 } H' \in \mathfrak{h}'.$$

对于每个 $\alpha \in \Sigma$，选一个根向量 $E_\alpha \in \mathfrak{g}$ 和一个根向量 $E'_\alpha \in \mathfrak{g}'$，使

$$(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1 \text{ 及 } (E'_\alpha, E'_{-\alpha}) = 1.$$

这时 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}'$ 的結构公式分别为

$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$	$[\mathfrak{h}', \mathfrak{h}'] = 0$
$[H, E_\alpha] = \alpha(H)E_\alpha$	$[H', E'_\alpha] = \alpha(H')E'_\alpha$
$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha$	$[E'_\alpha, E'_{-\alpha}] = H'_\alpha$
$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}$	$[E'_\alpha, E'_\beta] = N'_{\alpha\beta}E'_{\alpha+\beta}$
（如 $\alpha + \beta \neq 0$）	（如 $\alpha + \beta \neq 0$）

如果 $N_{\alpha\beta} = N_{\alpha'\beta'}$，对一切 $\alpha, \beta \in \Sigma$ 而 $\alpha + \beta \neq 0$，那么令

$$\sum_{\alpha\in\Sigma} a_\alpha H_\alpha + \sum_{\alpha\in\Sigma} b_\alpha E_\alpha \to \sum_{\alpha\in\Sigma} a_\alpha H'_\alpha + \sum_{\alpha\in\Sigma} b_\alpha E'_\alpha,$$

就得到从 $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}'$ 之上的一个同构映射，且此同构映射誘导出 Σ 的自合同。

現在我們証明，的确可以选 E'_α 使 $N'_{\alpha\beta} = N_{\alpha\beta}$. 为此，我們在 Σ 所属的欧氏空間中选一組基 $e_1, \cdots, e_n$. 利用这組基引进一次序：$x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, $y = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n$，定义 $x > y$，如有 k 存在使 $x_i = y_i$ $(1 \leqslant i \leqslant k-1)$ 而 $x_k > y_k$. 容易驗証这个次序关系适合条件：

1° 对于任意的 x 和 y，$x > y$，$x = y$ 及 $x < y$ 三者必具其一。

2° 如果 $x > y$，$y > z$，则 $x > z$。

3° 如果 $x > y$，$\lambda > 0$，則 $\lambda x > \lambda y$ 及 $x + z > y + z$.

于是 Σ 中向量可以按大小排成次序，先排小的，后排大的。如 $\alpha \in \Sigma$ 而 $\alpha > 0$，α 就称为正根；否則称为負根。我們对于正根順序数用

归納法来选取 E'_α 使 $N'_{\alpha\beta}=N_{\alpha\beta}$。

設 ρ 是一个固定的正根。假設对于一切根 α 适合条件 $-\rho<\alpha<\rho$ 者，我們都选了一个根向量 $E'_\alpha\in\mathfrak{g}'$ 使得 $(E'_\alpha, E'_{-\alpha})=1$ 以及

$$N'_{\alpha\beta}=N_{\alpha\beta},\ \text{对任意}\ \alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Sigma\ \text{及}$$
$$-\rho<\alpha,\beta,\alpha+\beta<\rho.$$

如 ρ 不能分解成 $\rho=\gamma+\delta$ 而 $-\rho<\gamma,\ \delta<\rho$，則任选根向量 E'_ρ 和 $E'_{-\rho}$ 使 $(E'_\rho, E'_{-\rho})=1$。如 ρ 有一种方法分解成 $\rho=\gamma+\delta$ 而 $-\rho<\gamma,\delta<\rho$，則利用

$$[E'_\gamma, E'_\delta]=N_{\gamma,\delta}E'_\rho \tag{5}$$

来选取 E'_ρ，再唯一确定 $E'_{-\rho}$ 使 $(E'_\rho, E'_{-\rho})=1$。我們要証明

$$N'_{\alpha\beta}=N_{\alpha\beta},\ \text{对任意}\ \alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Sigma,\ \text{而}\ -\rho\leqslant\alpha,\beta,$$
$$\alpha+\beta\leqslant\rho.\ \text{分以下几步来証明。}$$

1) $-\rho<\alpha,\beta,\alpha+\beta<\rho$，这时根据归納假設有 $N'_{\alpha\beta}=N_{\alpha\beta}$.

2) $-\rho<\alpha,\ \beta<\rho,\ \alpha+\beta=\rho$。如 ρ 的分解 $\rho=\alpha+\beta$，即 $\rho=\gamma+\delta$。根据 E'_ρ 的选法，由(5)就有 $N'_{\alpha\beta}=N_{\alpha\beta}$。設 $\rho=\alpha+\beta$，而不是 $\rho=\gamma+\delta$，則 $\alpha+\beta+(-\gamma)+(-\delta)=0$，即 α, β, $-\gamma$, $-\delta$ 組成一个四边形。于是根据引理 3 之 iii) 就有

$$N_{\alpha\beta}N_{-\gamma,-\delta}=-N_{\alpha,-\gamma}N_{-\delta,\beta}-N_{\alpha,-\delta}N_{\beta,-\gamma},$$
$$N'_{\alpha\beta}N'_{-\gamma,-\delta}=-N'_{\alpha,-\gamma}N'_{-\delta,\beta}-N'_{\alpha,-\delta}N'_{\beta,-\gamma}.$$

注意从 $0<\alpha,\gamma<\rho$ 推出 $-\rho<\alpha-\gamma<\rho$，同理有 $-\rho<-\delta$, β, $\beta-\delta<\rho$, $-\rho<\alpha,-\delta$, $\alpha-\delta<\rho$, $-\rho<\beta,-\gamma$, $\beta-\gamma<\rho$。因此根据归納假設有

$$N_{\alpha,-\gamma}=N'_{\alpha,-\gamma},\ N_{-\delta,\beta}=N'_{-\delta,\beta},$$
$$N_{\alpha,-\delta}=N'_{\alpha,-\delta},\ N_{\beta,-\gamma}=N'_{\beta,-\gamma},$$

所以

$$N_{\alpha\beta}N_{-\gamma,-\delta}=N'_{\alpha\beta}N'_{-\gamma,-\delta}. \tag{6}$$

但是从 $N_{\gamma\delta}=N'_{\gamma\delta}$ 及引理 3 之 iv) 推出 $N_{-\gamma,-\delta}=N'_{-\gamma,-\delta}$。于是从(6)式推出 $N_{\alpha\beta}=N'_{\alpha\beta}$。

3) $-\rho<\alpha,\beta<\rho,\ \alpha+\beta=-\rho$。这时 $\rho=(-\alpha)+(-\beta)$

而 $-\rho < -\alpha$, $-\beta < \rho$, 于是根据 2) 有 $N_{-\alpha,-\beta} = N'_{-\alpha,-\beta}$。再根据引理 3 之 iv) 推出 $N_{\alpha\beta} = N'_{\alpha\beta}$.

4) $-\rho \leqslant \alpha, \beta, \alpha+\beta \leqslant \rho$. 这时 $\alpha+\beta+(-\alpha-\beta)=0$, 因此在 α, β, $-\alpha-\beta$ 这三个根中顶多有一个等于 $\pm\rho$. 那么, 利用引理 3 之 ii) 可将这情形化归已討論过的情形.

这样,定理 6 就完全証明了.

下面的定理可看作是定理 6 的逆, 它是第三章定理 6 (Cartan 子代数的共轭性) 的直接推論.

定理 7. 設 $\mathfrak{g}$ 是半单李代数, $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}'$ 是它的两个 Cartan 子代数,而 Σ 和 Σ' 分别是 $\mathfrak{g}$ 相应于 $\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{h}'$ 的根系,則 Σ 与 Σ' 合同. 換言之,半单李代数的根系在合同的意义下由代数本身所确定,而不依賴于 Cartan 子代数的选取;或具不合同的根系的半单李代数一定不同构。

証. 根据第三章定理 6, $\mathfrak{g}$ 有自同构 σ 使 $\sigma(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}'$. 設 α 是 $\mathfrak{g}$ 相对于 $\mathfrak{h}$ 的一个根,即有根向量 E_α 使

$$[H, E_\alpha] = \alpha(H)E_\alpha, \quad \text{对一切 } H \in \mathfrak{h}.$$

将上式双方作用 σ 之后得

$$[\sigma(H), \sigma(E_\alpha)] = \alpha(H)\sigma(E_\alpha), \quad \text{对一切 } H \in \mathfrak{h}.$$

定义 $\mathfrak{h}'$ 上的一个綫性函数

$$\alpha'(H') = \alpha(\sigma^{-1}(H')), \quad H' \in \mathfrak{h},$$

則有

$$[H', \sigma(E_\alpha)] = \alpha'(H')\sigma(E_\alpha), \quad \text{对一切 } H' \in \mathfrak{h}.$$

这表明 α' 是 $\mathfrak{g}$ 相对于 $\mathfrak{h}'$ 的一个根, 于是 σ 誘导出从 Σ 到 Σ' 的一个映射,仍記作 σ:

$$\alpha \to \alpha'.$$

因 Σ 和 Σ' 有相同的个数,故这个映射是一一的。

将 $\alpha \in \Sigma$ 嵌入 $\mathfrak{h}$ 得 H_α, 即

$$(H, H_\alpha) = \alpha(H) \quad \text{对一切 } H \in \mathfrak{h}.$$

于是根据 σ 保持 Killing 型这一性質,得

$$(\sigma(H), \sigma(H_\alpha)) = \alpha(H), \text{ 对一切 } H \in \mathfrak{h}.$$

記 $\sigma(H) = H'$，則有

$$(H', \sigma(H_\alpha)) = \alpha'(H'), \text{ 对一切 } H' \in \mathfrak{h}.$$

因此如将 $\alpha' \in \Sigma'$ 嵌入 $\mathfrak{h}'$ 得 $H'_{\alpha'}$，則有 $H'_{\alpha'} = \sigma(H_\alpha)$. 于是，如 α, $\beta \in \Sigma$，則

$$\begin{aligned}(\sigma(\alpha), \sigma(\beta)) &= (H'_{\sigma(\alpha)}, H'_{\sigma(\beta)}) = (\sigma(H_\alpha), \sigma(H_\beta)) \\ &= (H_\alpha, H_\beta) = (\alpha, \beta).\end{aligned}$$

这証明了 σ 是将 Σ 映到 Σ' 之上的合同。

为了以后的需要，我們証明

定理 8[1]. 在半单李代数 $\mathfrak{g}$ 中可以选取根向量 E_α 适合

$$(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$$

而使結构常数 $N_{\alpha\beta}$ 是非零实数（对 $\alpha + \beta \in \Sigma$）且满足

$$N_{\alpha\beta} = -N_{-\alpha-\beta},$$

于是

$$N^2_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} = \frac{q(p+1)}{2}(\alpha, \alpha) > 0.$$

这样，可选取 E_α 使 $N^2_{\alpha\beta}$ 由根系 Σ 唯一确定。

証. $\mathfrak{g}$ 的根系 Σ 有自合同：

$$\alpha \to \alpha' = -\alpha.$$

对每一 α' 可选根向量 $Y_{\alpha'} = -E_{-\alpha}$ 使

$$(Y_{\alpha'}, Y_{-\alpha'}) = (E_{-\alpha}, E_\alpha) = 1.$$

令

$$[Y_{\alpha'}, Y_{\beta'}] = N'_{\alpha'\beta'} Y_{\alpha'+\beta'}, \text{ 对 } \alpha + \beta \neq 0,$$

則

$$N'_{\alpha'\beta'} = -N_{-\alpha,-\beta} \quad \text{对 } \alpha + \beta \neq 0.$$

根据定理 6，对每个 α 可选 μ_α 使 $\mu_\alpha\mu_{-\alpha} = 1$，而以 $Z_\alpha = \mu_\alpha E_\alpha$ 代 E_α 之后有

1) 見 79 頁脚注.

$$[Z_\alpha, Z_\beta] = -N_{-\alpha,-\beta} Z_{\alpha+\beta} \quad 对\ \alpha+\beta \neq 0.$$

这样一来,

$$-N_{-\alpha,-\beta} = \frac{\mu_\alpha \mu_\beta}{\mu_{\alpha+\beta}} N_{\alpha,\beta} \quad 对\ \alpha+\beta \in \Sigma.$$

置 $\tilde{\mu}_\alpha = \sqrt{\mu_\alpha}$ 并固定其符号使 $\tilde{\mu}_\alpha \tilde{\mu}_{-\alpha} = 1$. 令 $F_\alpha = \tilde{\mu}_\alpha E_\alpha$, 而 $[F_\alpha, F_\beta] = \tilde{N}_{\alpha\beta} F_{\alpha+\beta}$. 如 $\alpha+\beta \neq 0$, 則当 $\alpha+\beta \in \Sigma$ 时,

$$\begin{aligned}\tilde{N}_{\alpha\beta} &= \frac{\tilde{\mu}_\alpha \tilde{\mu}_\beta}{\tilde{\mu}_{\alpha+\beta}} N_{\alpha\beta} = -\frac{\tilde{\mu}_\alpha \tilde{\mu}_\beta}{\tilde{\mu}_{\alpha+\beta}} \frac{\mu_{\alpha+\beta}}{\mu_\alpha \mu_\beta} N_{-\alpha,-\beta} \\ &= -\frac{\tilde{\mu}_{-\alpha} \tilde{\mu}_{-\beta}}{\tilde{\mu}_{-\alpha,-\beta}} N_{-\alpha,-\beta} = -\tilde{N}_{-\alpha,-\beta}.\end{aligned}$$

于是

$$\tilde{N}^2_{\alpha\beta} = -\tilde{N}_{\alpha\beta}\tilde{N}_{-\alpha,-\beta} = R_{\alpha\beta} = \frac{q(p+1)}{2}(\alpha, \alpha).$$

这就証明了定理 8.

最后我們給出以下定义. 設 $\mathfrak{g}$ 是个半单李代数而 $\mathfrak{h}$ 是它的一个 Cartan 子代数, Σ 是它的根系. 設 $H_1, \cdots, H_n$ 是 $\mathfrak{h}$ 的任意一組基, 并假定对于每个根 α, 有根向量 E_α 存在, 使 $(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1$ 以及 $N_{\alpha\beta} = -N_{-\alpha,-\beta}$ (注意这时 $N_{\alpha\beta}$ 一定是实数), 則 $\{H_1, \cdots, H_n; E_\alpha, \alpha \in \Sigma\}$ 就称为 $\mathfrak{g}$ 的一組 Weyl 基. 定理 8 有以下直接推論.

系理. 半单李代数一定有 Weyl 基存在.

复半单李代数的 Weyl 基对于以后討論它的紧致实形很重要.

§4. 典型李代数的根系

先研究 A_n. 令 $m = n+1$. 我們知道

$$\mathfrak{h} = \left\{ H_{\lambda_1 \cdots \lambda_m} \,\middle|\, \sum_1^m \lambda_i = 0 \right\}$$

是 A_n 的一个 Cartan 子代数. A_n 相应于 $\mathfrak{h}$ 的根系 $\Sigma(A_n)$ 是

$$\lambda_i - \lambda_k \quad i \neq k, \quad 1 \leqslant i, k \leqslant m.$$

这一共有 $m(m-1)=m^2-m$ 个. 相应于根 $\lambda_i-\lambda_k$ 的根向量是 E_{ik}. 我們来計算 A_n 的 Killing 型 对 $\mathfrak{h}$ 的限制. 我們选取 E_{ik} $(i\neq k,\ 1\leqslant i,\ k\leqslant m)$ 及 $\mathfrak{h}$ 的一組基的并作为 A_n 的一組基,于是

$$
\begin{aligned}
(H_{\lambda_1\cdots\lambda_m},H_{\mu_1,\cdots,\mu_m}) &= \sum_{\substack{i,k=1\\ i\neq k}}^{m}(\lambda_i-\lambda_k)(\mu_i-\mu_k)\\
&= \sum_{\substack{i,k=1\\ i\neq k}}^{m}(\lambda_i\mu_i+\lambda_k\mu_k-\lambda_i\mu_k-\lambda_k\mu_i)\\
&= 2(m-1)\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\mu_i-2\sum_{\substack{i,k=1\\ i\neq k}}^{m}\lambda_i\mu_k\\
&= 2(m-1)\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\mu_i-2\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\sum_{k=1}^{m}\mu_k+2\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\mu_i\\
&= 2m\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\mu_i. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

特别

$$(H_{\lambda_1\cdots\lambda_m},H_{\lambda_1\cdots\lambda_m})=2m\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^2.$$

我們要将根 $\lambda_i-\lambda_k$ 嵌入 $\mathfrak{h}$, 即在 $\mathfrak{h}$ 中寻求一元素 $H_{\mu_1\cdots\mu_m}$ 使

$$(H_{\lambda_1\cdots\lambda_m},H_{\mu_1\cdots\mu_m})=\lambda_i-\lambda_k, \qquad (2)$$

对任意 $H_{\lambda_1\cdots\lambda_m}\in\mathfrak{h}$, 即对任意 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 适合条件 $\sum_1^m\lambda_i=0$ 者. 由(1)及(2)得

$$2m\sum_{s=1}^{m}\lambda_s\mu_s=\lambda_i-\lambda_k.$$

对任意 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 适合条件 $\sum_1^m\lambda_i=0$. 这时一定有

$$\mu_s = \begin{cases} c + \dfrac{1}{2m} & 对\ s = i, \\ c - \dfrac{1}{2m} & 对\ s = k, \\ c & 对\ s \neq i, k, \end{cases}$$

而 c 为某一常数. 又因 $\sum_1^m \mu_s = 0$, 故 $c = 0$. 因此

$$\mu_s = \begin{cases} \dfrac{1}{2m} & 对\ s = i, \\ -\dfrac{1}{2m} & 对\ s = k, \\ 0 & 对\ s \neq i, k. \end{cases}$$

这样,如将 $\mathfrak{h}_0$ 与 $\mathfrak{h}_0^*$ 視为同一,就有

$$\lambda_i - \lambda_k = \frac{1}{2m}(E_{ii} - E_{kk}).$$

根的长度的平方

$$(\lambda_i - \lambda_k, \lambda_i - \lambda_k) = \left(\frac{1}{2m}\right)^2 (E_{ii} - E_{kk}, E_{ii} - E_{kk})$$

$$= \left(\frac{1}{2m}\right)^2 2m \cdot 2 = \frac{1}{m}.$$

如以 $e_i = \dfrac{1}{2m} E_{ii}\ (i = 1, \cdots, m)$ 作为 $n+1$ 維欧氏空間的一組正交基,并令

$$(e_i, e_i) = \frac{1}{2m},$$

于是 $\mathfrak{h}_0$ 由一切向量

$$\sum_1^m \mu_i e_i \left(\mu_i\ 实,\ \sum_1^m \mu_i = 0\right)$$

組成,而 A_n 的根系 $\Sigma(A_n)$ 可記作

$$\{e_i - e_k,\ i \neq k,\ i, k = 1, \cdots, m\}.$$

再研究 B_n. 令 $m = 2n + 1$, 我們知道

$$\mathfrak{h}=\left\{H_{\lambda_1\cdots\lambda_n}=\left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix}-\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & -\lambda_n\end{matrix}\end{array}\right)\right\}$$

是 $\mathfrak{h}$ 的一个 Cartan 子代数. 相应的根系 $\Sigma(B_n)$ 是

$$\pm\lambda_i\pm\lambda_k(i<k) \text{ 和 } \pm\lambda_i \quad (i,k=1,\cdots,n).$$

我們計算

$$\begin{aligned}
&(H_{\lambda_1\cdots\lambda_n}, H_{\mu_1\cdots\mu_n})\\
&=\sum_{i<k}(\pm\lambda_i\pm\lambda_k)(\pm\mu_i\pm\mu_k)+\sum_{i=1}^{n}(\pm\lambda_i)(\pm\mu_i)\\
&=\sum_{i<k}\{(\lambda_i+\lambda_k)(\mu_i+\mu_k)+(\lambda_i-\lambda_k)(\mu_i-\mu_k)\\
&\quad+(-\lambda_i+\lambda_k)(-\mu_i+\mu_k)+\\
&\quad+(-\lambda_i-\lambda_k)(-\mu_i-\mu_k)\}\\
&\quad+\sum_{1}^{n}\{\lambda_i\mu_i+(-\lambda_i)(-\mu_i)\}\\
&=2\sum_{i<k}\{(\lambda_i+\lambda_k)(\mu_i+\mu_k)+(\lambda_i-\lambda_k)(\mu_i-\mu_k)\}\\
&\quad+2\sum_{1}^{n}\lambda_i\mu_i\\
&=2\sum_{i<k}(\lambda_i\mu_i+\lambda_i\mu_k+\lambda_k\mu_i+\lambda_k\mu_k+\lambda_i\mu_i\\
&\quad-\lambda_i\mu_k-\lambda_k\mu_i+\lambda_k\mu_k)+2\sum_{1}^{n}\lambda_i\mu_i\\
&=4\sum_{i<k}(\lambda_i\mu_i+\lambda_k\mu_k)+2\sum_{1}^{n}\lambda_i\mu_i
\end{aligned}$$

$$= 4(n-1)\sum_{1}^{n}\lambda_i\mu_i + 2\sum_{1}^{n}\lambda_i\mu_i$$

$$= (4n-2)\sum_{1}^{n}\lambda_i\mu_i.$$

特别

$$(H_{\lambda_1\cdots\lambda_n}, H_{\lambda_1\cdots\lambda_n}) = (4n-2)\sum_{1}^{n}\lambda_i^2.$$

我們要将根 $\pm\lambda_i\pm\lambda_k$ 及 $\pm\lambda_i$ 嵌入 $\mathfrak{h}$. 首先在 $\mathfrak{h}$ 中寻求一元素 $H_{\mu_1\cdots\mu_n}$ 使

$$(H_{\lambda_1\cdots\lambda_n}, H_{\mu_1\cdots\mu_n}) = \lambda_i + \lambda_k,$$

这要求

$$(4n-2)\sum_{1}^{n}\lambda_s\mu_s = \lambda_i + \lambda_k, \text{对一切 } \lambda_1, \cdots, \lambda_n.$$

因此

$$\mu_s = \begin{cases} \dfrac{1}{4n-2} & s = i, k, \\ 0 & s \neq i, k. \end{cases}$$

如将 $\mathfrak{h}_0^*$ 与 $\mathfrak{h}_0$ 視为同一,并記

$$H_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & -E_{ii} \end{pmatrix},$$

則

$$\lambda_i + \lambda_k = \frac{1}{4n-2}(H_i + H_k).$$

同理

$$\pm\lambda_i \pm \lambda_k = \frac{1}{4n-2}(\pm H_i \pm H_k),$$

$$\pm\lambda_i = \frac{1}{4n-2}(\pm H_i).$$

根的长度的平方

$$(\pm\lambda_i\pm\lambda_k, \pm\lambda_i\pm\lambda_k)=\left(\frac{1}{4n-2}\right)^2(\pm H_i\pm H_k, \pm H_i\pm H_k)$$

$$=\left(\frac{1}{4n-2}\right)^2(4n-2)2=\frac{1}{2n-1},$$

$$(\pm\lambda_i, \pm\lambda_i)=\left(\frac{1}{4n-2}\right)^2(\pm H_i, \pm H_i)$$

$$=\left(\frac{1}{4n-2}\right)^2(4n-2)=\frac{1}{4n-2}.$$

如以 $e_i=\frac{1}{4n-2}H_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 作为 n 維欧氏空間的一組正交基，于是

$$(e_i, e_i)=\frac{1}{4n-2},$$

于是 $\mathfrak{h}_0$ 由一切向量

$$\sum_1^n \mu_i e_i \quad (\mu_i \text{ 实})$$

組成，B_n 的根系 $\Sigma(B_n)$ 可記作

$$\{\pm e_i\pm e_k, \pm e_i, i<k, i, k=1,\cdots,n\}.$$

注意 B_1 的根系是 $\{\pm e_1\}$，而

$$(e_1, e_1)=(-e_1, -e_1)=\frac{1}{4n-2}=\frac{1}{2},$$

$$(e_1, -e_1)=-\frac{1}{4n-2}=-\frac{1}{2}.$$

回忆 A_1 的根系是 $\{e_1-e_2, e_2-e_1\}$ 而

$$(e_1-e_2, e_1-e_2)=(e_2-e_1, e_2-e_1)=\frac{1}{m}=\frac{1}{2},$$

$$(e_1-e_2, e_2-e_1)=-\frac{1}{2},$$

所以 A_1 和 B_1 有合同的根系，因此 A_1 和 B_1 同构.

再研究 $D_n(n \geqslant 2)$. 令 $m = 2n$, 我們知道

$$\mathfrak{h}_0 = \left\{ H_{\lambda_1\cdots\lambda_n} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_n & & & \\ \hline & & & -\lambda_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & -\lambda_n \end{array} \right) \right\}$$

是 D_n 的一个 Cartan 子代数. 相应的根系 $\Sigma(D_n)$ 是

$$\pm\lambda_i \pm \lambda_k \quad (i < k, i, k = 1, \cdots, n).$$

我們計算

$$(H_{\lambda_1\cdots\lambda_n}, H_{\mu_1\cdots\mu_n}) = \sum_{i<k} (\pm\lambda_i \pm \lambda_k)(\pm\mu_i \pm \mu_k)$$

$$= 2\sum_{i<k} \{(\lambda_i + \lambda_k)(\mu_i + \mu_k) + (\lambda_i - \lambda_k)(\mu_i - \mu_k)\}$$

$$= 4\sum_{i<k} (\lambda_i\mu_i + \lambda_k\mu_k)$$

$$= (4n - 4)\sum_1^n \lambda_i\mu_i.$$

特别

$$(H_{\lambda_1\cdots\lambda_n}, H_{\lambda_1\cdots\lambda_n}) = (4n-4)\sum_1^n \lambda_i^2.$$

我們要将根 $\pm\lambda_i \pm \lambda_k$ 嵌入 $\mathfrak{h}$. 在 $\mathfrak{h}$ 中寻求一元素 $H_{\mu_1\cdots\mu_n}$ 使

$$(H_{\lambda_1\cdots\lambda_n}, H_{\mu_1\cdots\mu_n}) = \pm\lambda_i \pm \lambda_k,$$

这要求

$$(4n-4)\sum_1^n \lambda_s\mu_s = \pm\lambda_i \pm \lambda_k.$$

因此

$$\mu_s = \begin{cases} \pm\dfrac{1}{4n-4} & s = i, k, \\ 0 & s \neq i, k. \end{cases}$$

所以如将 $\mathfrak{h}_0^*$ 与 $\mathfrak{h}_0$ 视为同一，并記

$$H_i=\begin{pmatrix}E_{ii} & 0\\ 0 & -E_{ii}\end{pmatrix},$$

則

$$\pm\lambda_i\pm\lambda_k=\frac{1}{4n-4}(\pm H_i\pm H_k).$$

根的长度的平方

$$(\pm\lambda_i\pm\lambda_k,\pm\lambda_i\pm\lambda_k)=\left(\frac{1}{4n-4}\right)^2(\pm H_i\pm H_k,\pm H_i\pm H_k)$$

$$=\left(\frac{1}{4n-4}\right)^2(4n-4)\cdot 2=\frac{1}{2n-2}.$$

如以 $e_i=\frac{1}{4n-4}H_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 作为 n 維欧氏空間的一組正交組，則

$$(e_i,e_i)=\frac{1}{4n-4}.$$

于是 $\mathfrak{h}_0$ 由一切向量

$$\sum_1^n \mu_i e_i \quad (\mu_i\ 实)$$

組成，D_n 的根系 $\Sigma(D_n)$ 可記作

$$\{\pm e_i\pm e_k,\ i<k,\ i,k=1,\cdots,n\}.$$

注意 $\Sigma(D_2)=\{\pm e_1\pm e_2\}$，而

$$(\pm e_1\pm e_2,\ \pm e_1\pm e_2)=\frac{1}{2n-2}=\frac{1}{2},$$

$$(e_1+e_2,-e_1-e_2)=-\frac{1}{2},$$

$$(e_1-e_2,-e_1+e_2)=-\frac{1}{2},$$

$$(\pm e_1\pm e_2,\ \pm e_1\mp e_2)=0,$$

所以 $\Sigma(D_2)$ 分解成两个互相正交的子系的併：

$$\Sigma(D_2) = \{e_1 + e_2, -e_1 - e_2\} \cup \{e_1 - e_2, -e_1 + e_2\},$$

其中每一个子 σ 系都与 A_1 的根系合同，所以 $D_2 \cong A_1 + A_1$.

研究 C_n. 我們知道

$$\mathfrak{h}_0 = \left\{ H_{\lambda_1\cdots\lambda_n} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_n & & & \\ \hline & & & -\lambda_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & -\lambda_n \end{array} \right) \right\}$$

是 C_n 的一个 Cartan 子代数. 相应的根系 $\Sigma(C_n)$ 是 $\pm\lambda_i \pm \lambda_k$ 和 $\pm 2\lambda_i$ $(i < k,\ i,\ k = 1, \cdots, n)$. 計算

$$\begin{aligned}
&(H_{\lambda_1\cdots\lambda_n}, H_{\mu_1\cdots\mu_n}) \\
&= \sum_{i<k} (\pm\lambda_i \pm \lambda_k)(\pm\mu_i \pm \mu_k) + \sum_i (\pm 2\lambda_i)(\pm 2\mu_i) \\
&= 2\sum_{i<k} \{(\lambda_i + \lambda_k)(\mu_i + \mu_k) \\
&\qquad + (\lambda_i - \lambda_k)(\mu_i - \mu_k)\} + 8\sum_i \lambda_i\mu_i \\
&= 4\sum_{i<k} (\lambda_i\mu_i + \lambda_k\mu_k) + 8\sum \lambda_i\mu_i \\
&= 4(n-1)\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\mu_i + 8\sum_1^n \lambda_i\mu_i \\
&= 4(n+1)\sum_1^n \lambda_i\mu_i.
\end{aligned}$$

特别

$$(H_{\lambda_1\cdots\lambda_n}, H_{\lambda_1\cdots\lambda_n}) = (4n+4)\sum_1^n \lambda_i^2.$$

我們要将根 $\pm\lambda_i \pm \lambda_k$ 及 $\pm 2\lambda_i$ 嵌入 $\mathfrak{h}$. 由

$$(H_{\lambda_1\cdots\lambda_n}, H_{\mu_1\cdots\mu_n}) = \pm\lambda_i \pm \lambda_k \text{ 或 } \pm 2\lambda_i$$

得

$$(4n+4)\sum_1^n \lambda_s\mu_s = \pm\lambda_i\pm\lambda_k \text{ 或 } \pm 2\lambda_i, \text{对一切 } \lambda_1, \cdots, \lambda_n.$$

因此，对于$\pm\lambda_i\pm\lambda_k$

$$\mu_s\Big|_{\pm\lambda_i\pm\lambda_k} = \begin{cases} \pm\dfrac{1}{4n+4} & s=i, k, \\ 0 & s\neq i, k, \end{cases}$$

而对于$\pm 2\lambda_i$

$$\mu_s\Big|_{\pm 2\lambda_i} = \begin{cases} \pm\dfrac{1}{2n+2} & s=i, \\ 0 & s\neq i. \end{cases}$$

于是，如将 $\mathfrak{h}_0^*$ 与 $\mathfrak{h}_0$ 视为同一，并記

$$H_i = \begin{pmatrix} E_{ii} & 0 \\ 0 & -E_{ii} \end{pmatrix},$$

则

$$\pm\lambda_i\pm\lambda_k = \frac{1}{4n+4}(\pm H_i \pm H_k),$$

$$\pm 2\lambda_i = \frac{1}{4n+4}(\pm 2H_i).$$

根的长度的平方

$$(\pm\lambda_i\pm\lambda_k, \pm\lambda_i\pm\lambda_k) = \left(\frac{1}{4n+4}\right)^2(\pm H_i\pm H_k, \pm H_i\pm H_k)$$
$$= \left(\frac{1}{4n+4}\right)^2(4n+4)\cdot 2 = \frac{2}{4n+4},$$

$$(\pm 2\lambda_i, \pm 2\lambda_i) = \left(\frac{1}{4n+4}\right)^2(\pm 2H_i, \pm 2H_i)$$
$$= \left(\frac{1}{4n+4}\right)^2(4n+4)\cdot 4 = \frac{4}{4n+4}.$$

如令 $e_i = \dfrac{1}{4n+4}H_i$，则

$$(e_i, e_i) = \frac{1}{4n+4},$$

而 $e_1, \cdots, e_n$ 生成一个 n 維欧氏空間. C_n 的根系 $\Sigma(C_n)$ 是

$$\{\pm e_i \pm e_k \quad i < k, \quad \pm 2e_i \quad i, k = 1, \cdots, n\}.$$

可仿照証明 A_1 与 B_1 同构的方法，証明 $\Sigma(A_1)$ 与 $\Sigma(C_1)$ 合同，于是推出 A_1 与 C_1 同构.

第六章　半单李代数的基础根系与 Weyl 羣

§1. 基础根系与素根系

設 Σ 是个 σ 系. Σ 中的一組向量 $\Pi=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 称为 Σ 的一个基础向量系，如果以下二条件成立：

1° $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 綫性无关；

2° 任一 $\alpha\in\Sigma$ 皆可表作

$$\alpha=\varepsilon(m_1\alpha_1+m_2\alpha_2+\cdots+m_n\alpha_n),$$

其中 $\varepsilon=\pm 1$, 而 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 都是非負整数. 特別，半单李代数的根系的一个基础向量系称为它的一个基础根系.

設 Π 是 σ 系 Σ 的一个基础向量系，則 Π 有以下性质：

3° 設 $\alpha, \beta\in\Pi$ 而 $\alpha\neq\beta$, 則

$$(\alpha, \beta)\leqslant 0,$$

而 $\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ 和 $\frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)}$ 都是非正的整数.

証. 根据 σ 系的基础向量系的性质 2° 知, $\beta-\alpha\notin\Sigma$. 如果以 p 和 q 表最大非負整数使 $\beta+k\alpha\in\Sigma$, $(-p\leqq k\leqq q)$, 則 $p=0$. 因 Σ 是 σ 系，故

$$\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}=-(q-p)=-q\leqslant 0.$$

因此 $(\beta, \alpha)\leqslant 0$, 由此也推出 $\frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)}\leqslant 0$.

下面的定理肯定了任一 σ 系皆有基础向量系存在.

定理 1.[1)] 設 Σ 是个 σ 系，于是可以在 Σ 中取出綫性无关的子集 $\Pi=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$, 使它满足以下条件：

---

1) 邓金，半单純李氏代数的結构，科学出版社，北京，1954.

i) 如 $\alpha, \beta \in \Pi$ 而 $\alpha \neq \beta$, 則

$$(\alpha, \beta) \leqslant 0, \tag{1}$$

因之, $\frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}$ 和 $\frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)}$ 都是非正的整数.

ii) 任一 $\alpha \in \Sigma$ 皆可写成

$$\alpha = \varepsilon(m_1\alpha_1 + \cdots + m_n\alpha_n), \tag{2}$$

其中 $\varepsilon = \pm 1$, 而 $m_1, \cdots, m_n$ 都是非負整数.

証. 設 Σ 属于 m 維欧氏空間 R^m. 在 R^m 中选定一組基 $e_1, e_2, \cdots, e_m$. 利用这組基, 我們可以在 R^m 中确定一个次序: 如 $x = a_1e_1 + \cdots + a_me_m$, $y = b_1e_1 + \cdots + b_me_m$; 定义 $x > y$, 如有正整数 k 存在,使

$$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ \cdots,\ a_k = b_k,\ 而\ a_{k+1} > b_{k+1}.$$

如 $x > 0$, 則称 x 为正向量; 如 $x < 0$, 則称 x 为負向量.

我們先証明

引理 1. σ 系 Σ 中滿足条件

$$(x_j, x_k) \leqslant 0, \quad j \neq k \tag{3}$$

的正向量 $x_1, x_2, \cdots, x_p$ 一定綫性无关.

証. 我們用反証法来証明. 假定 $x_1, \cdots, x_p$ 綫性相关,那么适当改变它們的次序,就有关系式

$$x_p = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i x_i$$

成立. 将这个关系式改写成

$$x_p = \Sigma' \lambda_i x_i + \Sigma'' \lambda_i x_i,$$

其中具正系数 λ_i 的項归在 Σ' 中,具負系数 λ_i 的項归在 Σ'' 中. 命

$$y = \Sigma' \lambda_i x_i, \quad z = \Sigma'' \lambda_i x_i,$$

于是就有 $x_p = y + z$. 因为 $x_p > 0$, $z \leqslant 0$, 故 $y \neq 0$, $y > 0$. 由于条件(3),我們有 $(y, z) \geqslant 0$. 因此

$$(x_p, y) = (y, y) + (z, y) > 0.$$

但是另一方面,仍根据(3),又有

$$(x_p, y) = \Sigma' \lambda_i(x_p, x_i) \leqslant 0.$$

这是一个矛盾，因此 $x_1, \cdots, x_p$ 一定綫性无关。

我們继續来証明定理 1. 假如 Σ 中有一个正向量不能分解成 Σ 中两个正向量之和，我們就称之为一个素向量. 我們以 $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 表示 Σ 中所有素向量的集合，称为素向量系. 我們来証明 Π 适合定理 1 中之性質 i) 和 ii).

設 $\alpha, \beta \in \Pi, \alpha \neq \beta$. 如 $(\alpha, \beta) > 0$，則 $\frac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}$ 和 $\frac{2(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)}$ 都是正整数. 于是根据 σ 系的性質 2° 知，$\beta - \alpha \in \Sigma$ 和 $\alpha - \beta \in \Sigma$. $\beta - \alpha$ 和 $\alpha - \beta$ 中一定有一个是正向量，設 $\varphi = \beta - \alpha$ 是正向量，則 $\beta = \varphi + \alpha$，这与 β 是素向量的假設相违. 同样 $\alpha - \beta$ 也不能是正向量，因此一定有 $(\alpha, \beta) \leqslant 0$. 更由此根据引理 1 推出，$\Pi$ 中向量一定綫性无关.

其次来証明 Π 具有性質 ii). Σ 中的向量个数是有限的，因而正向量的个数也是有限的. 将全体正向量按大小排列起来，小的排在大的前面. 我們向正向量的排列次序数施归納法来証明 (2) 式成立，但其中 $\varepsilon = 1$. 設 α 是个正向量. 如果 α 是素向量，則 $\alpha = \alpha_i$ (对某个 i). 如果 α 不是素向量，則 $\alpha = \beta + \gamma, \beta, \gamma \in \Sigma$, $\beta > 0, \gamma > 0$. 由于 $\alpha > \beta, \alpha > \gamma$，根据归納法假設 β 和 γ 皆可表成素向量的非負整数系数的綫性組合，将它們的表达式代入 $\alpha = \beta + \gamma$，即得出 α 可表成(2)的形狀而 $\varepsilon = 1$. 如 α 是負向量，則 $-\alpha > 0$，因之 $-\alpha$ 可表成(2)的形狀而 $\varepsilon = 1$，于是 α 可表成(2)的形狀而 $\varepsilon = -1$. 这样定理 1 就証明了.

由定理 1 立得

系理. 在 σ 系 Σ 所屬的欧氏空間中引进一个次序之后，Σ 的一个素向量系就是 Σ 的一个基础向量系.

自然，Σ 所屬的欧氏空間中的不同的次序可以給出不同的素向量系(因而不同的基础向量系)，也可以給出同一素向量系(因而同一基础向量系). 反之，我們有

定理 1′. 設 Π 是 σ 系 Σ 的一个基础向量系，則可在 Σ 所属的欧氏空間中引进一个次序，使这个次序所定的 Σ 的素向量系恰是 Π.

証. 設 $\Pi=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$，于是可設 Σ 属于由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 所张成的 n 維欧氏空間 R^n，而 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 R^n 的一組基. 利用基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 来規定 R^n 中的次序：如 $x=a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_n\alpha_n$, $y=b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+\cdots+b_n\alpha_n$, 規定 $x>y$, 如有正整数 k 存在使

$$a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ \cdots,\ a_k=b_k \text{ 而 } a_{k+1}>b_{k+1}.$$

在此次序下，Σ 中的一个向量 β 是正向量当且仅当 $\beta=\sum_{i=1}^{n} m_i\alpha_i$，其中 m_i 是不全为 0 的非負整数. 設 $\alpha_i=\beta+\gamma$, $\beta\geqslant 0$, $\gamma\geqslant 0$. 有 $\beta=\sum_{j=1}^{n} m_j\alpha_j$, $\gamma=\sum_{j=1}^{n} n_j\alpha_j$，而 m_j, n_j 皆是非負整数. 将 β 和 γ 的表达式代入 $\alpha_i=\beta+\gamma$ 就有 $\alpha_i=\sum_{j=1}^{n}(m_j+n_j)\alpha_j$. 因 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 綫性无关，故 $m_j+n_j=0$ 当 $j\neq i$ 时，而 $m_i+n_i=1$. 因此当 $j\neq i$ 时，$m_j=n_j=0$，而 $m_i=1$, $n_i=0$ 或 $m_i=0$, $n_i=1$. 于是 $\beta=\alpha_i$ 而 $\gamma=0$，或 $\beta=0$ 而 $\gamma=\alpha_i$. 这証明了 α_i 是素向量. 因此 Π 是素向量系. 这証明了定理 1′.

定理 2. 由 σ 系 Σ 的基础向量系 Π 可以唯一地决定出 Σ 自身，即利用 Π 的度量性質可以求出哪些綫性組合 (2) 是 Σ 中的向量. 因此，具有相同的(或合同的，或相似的)基础向量系的 σ 系一定相同(或合同，或相似).

証. 設 $\Pi=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 是 Σ 的一个基础向量系，則 Σ 属于由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 所张成的 n 維欧氏空間 R^n. 以 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 作为 R^n 的一組基而决定出 R^n 的一个次序. 以 Σ_+ 表示正向量的全体. 以 Σ_m (m 是正整数) 表 Σ_+ 中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的满足条件 $0<m_1+m_2+\cdots+m_n\leqslant m$ 的具非負整系数的綫性組合 $m_1\alpha_1+$

$m_2\alpha_2 + \cdots + m_n\alpha_n$ 的全体，于是有

$$\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2 \subseteq \cdots \subseteq \Sigma_m \subseteq \Sigma_{m+1} \subseteq \cdots \subseteq \Sigma_+.$$

我們用归納法証明 Σ_m $(m = 1, 2, \cdots)$ 可以依次由 Π 唯一地作出.

首先 $\Sigma_1 = \Pi$，因此 Σ_1 可以由 Π 作出. 現在設 Σ_m 已經作出. 我們先証明 $\Sigma_{m+1}\backslash\Sigma_m$ 中每一个向量 γ 皆可表成 $\gamma = \beta + \alpha$，而 $\beta \in \Sigma_m$，$\alpha \in \Pi$. 由于 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \gamma\}$ 綫性相关，故根据引理 1，一定有 i 存在使 $(\gamma, \alpha_i) > 0$. 根据 σ 系的性質 $2°$，$\beta = \gamma - \alpha_i \in \Sigma$. β 不可能是負向量，否則 $\alpha_i = \gamma + (-\beta)$ 是两个正向量之和. 于是 $\beta \in \Sigma_m$. 这就証明了我們要証的事实.

因为 Σ_m 已經作出，所以对任意 $\beta \in \Sigma_m$ 和 $\alpha \in \Pi$，$\beta - j\alpha (j = 1, 2, \cdots)$ 是否属于 Σ 的問題已經知道. 因此可以求出最大非負整数 p 使 $\beta - j\alpha \in \Sigma (j = 0, 1, 2, \cdots, p)$. 于是可算出 $q = p - \dfrac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$. 如 $q > 0$，我們就知道 $\beta + \alpha \in \Sigma_{m+1}$，否則 $\beta + \alpha \notin \Sigma_{m+1}$. 这样我們就作出了 Σ_{m+1}.

因此，我們可以从 Π、利用它的度量性質作出 Σ_+，因而也作出了 Σ. 于是 Σ 由 Π 的度量性質唯一确定.

系理. 如果两个半单李代数的基础根系合同(或相似)，那么这两个李代数一定同构.

証. 这是上面定理 2 以及第五章定理 6 的直接推論.

我們还可以仿照第五章定理 6 的証明方法，証明下面这个較強的結果.

定理 3. 設 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}'$ 是两个半单李代数，$\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{h}'$ 分别是它們的 Cartan 子代数，Σ 和 Σ' 分别是它們（相对于 $\mathfrak{h}$ 和 $\mathfrak{h}'$）的根系，而 $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 和 $\Pi' = \{\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_n'\}$ 分别是它們的基础根系. 設

$$\alpha_i \to \alpha_i' \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

是 Π 和 Π' 間的一个合同，卽

$$(\alpha_i, \alpha_k) = (\alpha'_i, \alpha'_k), \quad (i, k = 1, 2, \cdots, n).$$

那么任意給出两組根向量 $E_{\pm\alpha_i} \in \mathfrak{g}^{\pm\alpha_i}$, $E'_{\pm\alpha'_i} \in \mathfrak{g}^{\pm\alpha'_i}(i = 1, 2, \cdots, n)$, 如果它們适合关系

$$(E_{\alpha_i}, E_{-\alpha_i}) = 1, \ (E'_{\alpha'_i}, E'_{-\alpha'_i}) = 1,$$

則必有一个,而且仅有一个将 $\mathfrak{g}$ 映上 $\mathfrak{g}'$ 的同构映射 f 使

$$f(E_{\pm\alpha_i}) = E'_{\pm\alpha'_i}, \quad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{4}$$

証。 先証 f 的唯一性. 我們有

$$[E_{\alpha_i}, E_{-\alpha_i}] = H_{\alpha_i}, \ [E'_{\alpha'_i}, E'_{-\alpha'_i}] = H'_{\alpha'_i}, \ (i=1,2,\cdots,n).$$

因此, 由(4)导出 $f(H_{\alpha_i}) = H'_{\alpha'_i}$. 因 $H_{\alpha_i}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 綫性地生成 $\mathfrak{h}$, 故 $\mathfrak{h}$ 中任一元素的象都由条件(4)唯一确定.

我們在 $\mathfrak{h}_0^*$ 中引进一个次序, 使 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是相对于这个次序的素根系. 这样 Σ 中的根就排成了一个一定的次序. 我們向 Σ 中的正根的排列次序施归納法来証明,对任一 $\alpha \in \Sigma_+$, $\mathfrak{g}^{\pm\alpha}$ 中任一元素的象由条件 (4) 唯一确定. 設对于一切 $\rho \in \Sigma_+$ 而 $\rho < \alpha$, $\mathfrak{g}^{\pm\rho}$ 中任一元素的象由条件(4)唯一确定.如果 α 是一个素根,自然 $\mathfrak{g}^{\pm\alpha}$ 中任一元素的象由条件(4)唯一确定.設 α 不是素根,則 α 有分解 $\alpha=\beta+\gamma$, $0 < \beta, \gamma < \alpha$. 根据归納法假設, $\mathfrak{g}^{\pm\beta}$, $\mathfrak{g}^{\pm\gamma}$ 中任一元素的象皆由条件 (4) 唯一确定. 但 $\mathfrak{g}^{\pm\alpha} = [\mathfrak{g}^{\pm\beta}, \mathfrak{g}^{\pm\gamma}]$, 故 $\mathfrak{g}^{\pm\alpha}$ 中任一元素的象也由条件(4)唯一确定. 这就証明了 f 的唯一性.

其次, 仿照第五章定理 6 的証明方法来証明 f 的存在性. 首先我們注意, 当 Π 与 Π' 合同时, 根据定理 2, Σ 和 Σ' 也合同, 而且 Π 与 Π' 間的合同可扩为 Σ 与 Σ' 間的合同. 記 $\alpha \in \Sigma$ 在此扩充了的合同之下的象为 α'. 对任一 $\alpha \in \Sigma$, $\alpha \notin \Pi$, 也选取根向量 $E_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}^{\pm\alpha}$ 使

$$(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1.$$

設 $\alpha, \beta \in \Sigma$, $\alpha \neq \pm\beta$, 令

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta} E_{\alpha+\beta}.$$

問題在于証明: 对任一 $\alpha' \in \Sigma'$ 而 $\alpha \notin \Pi$, 可选取根向量 $E'_{\pm\alpha'} \in \mathfrak{g}^{\pm\alpha'}$

使

$$(E'_{\alpha'}, E'_{-\alpha'}) = 1,$$

而且当 $\alpha', \beta' \in \Sigma', \alpha' \neq \pm\beta'$ 时,有

$$[E'_{\alpha'}, E'_{\beta'}] = N_{\alpha\beta}E'_{\alpha'+\beta'}.$$

这样就和第五章定理 6 一样导出

$$\sum_{i=1}^{n} a_i H_{\alpha_i} + \sum_{\alpha\in\Sigma} b_\alpha E_\alpha \to \sum_{i=1}^{n} a_i H'_{\alpha'_i} + \sum_{\alpha\in\Sigma} b_\alpha E'_{\alpha'}$$

是将 $\mathfrak{g}$ 映到 $\mathfrak{g}'$ 之上的适合条件(4)的同构映射.

仍在 $\mathfrak{h}_0^*$ 中规定一个次序使 Π 为素根系,则相应地 $\mathfrak{h}_0'^*$ 中有一次序而 Π' 为素根系.

設 ρ' 是 Σ' 中一个固定的正根. 假設对一切根 α' 适合条件 $-\rho' < \alpha' < \rho'$ 者, 我們都选取了根向量 $E'_{\alpha'} \in \mathfrak{g}'^{\alpha'}$ 使得 $(E'_{\alpha'}, E'_{-\alpha'}) = 1$ 以及

$$[E'_{\alpha'}, E'_{\beta'}] = N_{\alpha\beta}E'_{\alpha'+\beta'}.\ \text{对任意}\ \alpha', \beta', \alpha'+\beta' \in \Sigma'$$
$$\text{而}\ -\rho' < \alpha', \beta', \alpha'+\beta' < \rho'.$$

如 ρ' 是一个素根, 設 $\rho' = \alpha'_i$, 就取 $E'_{\pm\rho'} = E'_{\pm\alpha'_i}$. 如 ρ' 不是素根,則 ρ' 有分解 $\rho' = \gamma' + \delta'$, $0 < \gamma', \delta' < \rho'$, 那么利用

$$[E'_{\gamma'}, E'_{\delta'}] = N_{\gamma\delta}E'_{\gamma'+\delta}$$

来选取 $E'_{\rho'}$, 再利用 $(E'_{\rho'}, E'_{-\rho'}) = 1$ 来唯一确定 $E'_{-\rho'}$. 无論在那一种情形,都可象第五章定理 6 一样来証明

$$[E'_{\alpha'}, E'_{\beta'}] = N_{\alpha\beta}E'_{\alpha'+\beta'},\ \text{对任意}\ \alpha', \beta', \alpha'+\beta' \in \Sigma'$$
$$\text{而}\ -\rho' \leqslant \alpha', \beta', \alpha'+\beta' \leqslant \rho'.$$

这就是我們所要証明的.

这样定理 3 就完全証明了.

我們知道,任一 σ 系 Σ 的基础向量系 Π 适合以下条件:

1° Π 由一些綫性无关的向量組成;

2° 如果 $\alpha, \beta \in \Pi$ 而 $\alpha \neq \beta$, 則 $\dfrac{2(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)}$ 是个非負的整数.

一般地,我们把欧氏空间中一个非空向量集 Π 定义为一个 π 系,如

果它适合上面的条件 1°和 2°.于是 σ 系的基础向量系是 π 系，特别半单李代数的基础根系也是 π 系．类似于单 σ 系，我們还可以定义一个 π 系是单 π 系，如果它不能分解两个互相正交的非空子集．于是我們有

定理 4.　設 Σ 是个 σ 系，Π 是它的一个基础向量系，则 Σ 是个单 σ 系当且仅当 Π 是个单 π 系．

証．設 Σ 是两个互相正交的非空子集之併：$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$，則 Σ_1 和 Σ_2 也是 σ 系．令 $\Pi_1 = \Sigma_1 \cap \Pi$，$\Pi_2 = \Sigma_2 \cap \Pi$．則 Π_1 和 Π_2 自然也互相正交而且非空，因而都是 π 系．（更进一步还可以証明，Π_1 是 Σ_1 的一組基础向量系，Π_2 是 Σ_2 的一組基础向量系．）

反之，設 Π 分解成两个互相正交的非空子集之併 $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$．自然 Π_1 和 Π_2 都是 π 系．以 Σ_{mi} 表 Σ_m 中与 Π_i 綫性相关的所有向量的集合 $(i = 1, 2)$，自然有 $(\Sigma_{m1}, \Sigma_{m2}) = 0 (m = 1, 2, \cdots)$．假設 $\Sigma_m = \Sigma_{m1} \cup \Sigma_{m2}$，我們来証明 $\Sigma_{m+1} = \Sigma_{m+1\,1} \cup \Sigma_{m+1\,2}$．設 $\gamma \in \Sigma_{m+1}$．于是 $\gamma = \beta + \alpha$，$\beta \in \Sigma_m$，$\alpha \in \Pi$．根据归納法假設，$\beta \in \Sigma_{m1}$ 或 $\beta \in \Sigma_{m2}$．为确定起見，設 $\beta \in \Sigma_{m1}$．假設此时有 $\alpha \in \Pi_2$，于是 $\beta - \alpha$ 分解成 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的綫性組合时，旣有正系数又有負系数，因此 $\beta - \alpha \notin \Sigma$．于是，如果 p 是最大非負整数使 $\beta - j\alpha \in \Sigma (j = 0, 1, 2, \cdots, p)$，則 $p = 0$．又 $\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = 0$，因此如果 q 是最大非負整数使 $\beta + j\alpha \in \Sigma (j = 0, 1, 2, \cdots, q)$，則 $q = p - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = 0$，这与 $\beta + \alpha \in \Sigma_{m+1}$ 相抵触．因此 $\alpha \in \Pi_1$，于是 $\gamma = \beta + \alpha \in \Sigma_{m+1\,1}$．这就証明了 $\Sigma_{m+1} = \Sigma_{m+1\,1} \cup \Sigma_{m+1\,2}$．令 $\Sigma_{+1} = \Sigma_{11} \cup \Sigma_{21} \cup \cdots$，$\Sigma_{+2} = \Sigma_{12} \cup \Sigma_{22} \cup \cdots$，則 Σ_+ 是互相正交的子集 Σ_{+1} 和 Σ_{+2} 之併．再令 $\Sigma_1 = \Sigma_{+1} \cup -\Sigma_{+1}$，$\Sigma_2 = \Sigma_{+2} \cup -\Sigma_{+2}$，則 Σ 是互相正交的子集 Σ_1 和 Σ_2 之併．

系理．　設 $\mathfrak{g}$ 是半单李代数，Π 是它的一个基础根系，于是 $\mathfrak{g}$ 是单代数当且仅当 Π 是单 π 系．

§ 2. 典型李代数的基础根系

在第五章 § 4 中,我們已經知道典型李代数的根系是

$$\Sigma(A_n) = \{e_i - e_k, i \neq k, i, k = 1, 2, \cdots, n+1\},$$

$$\Sigma(B_n) = \{\pm e_i \pm e_k, i < k; \pm e_i; i, k = 1, 2, \cdots, n\},$$

$$\Sigma(C_n) = \{\pm e_i \pm e_k, i < k; \pm 2e_i; i, k = 1, 2, \cdots, n\},$$

$$\Sigma(D_n) = \{\pm e_i \pm e_k, i < k, i, k = 1, 2, \cdots, n\} \ (n \geqslant 2).$$

于是 A_n, B_n, C_n, D_n 有以下的基础根系

$$\Pi(A_n) = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \cdots, e_n - e_{n+1}\},$$

$$\Pi(B_n) = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \cdots, e_{n-1} - e_n, e_n\},$$

$$\Pi(C_n) = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \cdots, e_{n-1} - e_n, 2e_n\},$$

$$\Pi(D_n) = \{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \cdots, e_{n-1} - e_n, e_{n-1} + e_n\}$$
$$(n \geqslant 2).$$

将基础根系中的根依上面的排列次序記作 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 我們来計算基础根的內积.

对于 A_n

$$(\alpha_i, \alpha_k) = \begin{cases} \dfrac{1}{m} & i = k, \\ -\dfrac{1}{2m} & |i-k| = 1, \\ 0 & |i-k| > 1. \end{cases}$$

对于 B_n

$$(\alpha_i, \alpha_k) = \begin{cases} \dfrac{1}{2n-1} & i = k, \\ -\dfrac{1}{4n-2} & |i-k| = 1, \\ 0 & |i-k| > 1, \end{cases} \quad (1 \leqslant i, k \leqslant n-1).$$

$$(\alpha_i, \alpha_n) = \begin{cases} 0 & i < n-1, \\ -\dfrac{1}{4n-2} & i = n-1, \\ \dfrac{1}{4n-2} & i = n. \end{cases}$$

对于 C_n

$$(\alpha_i, \alpha_k) = \begin{cases} \dfrac{1}{2n+2} & i = k, \\ -\dfrac{1}{4n+4} & |i-k| = 1, \quad (1 \leqslant i, k \leqslant n-1) \\ 0 & |i-k| > 1, \end{cases}$$

$$(\alpha_i, \alpha_n) = \begin{cases} 0 & i < n-1, \\ -\dfrac{1}{4n+4} & i = n-1, \\ \dfrac{1}{n+1} & i = n. \end{cases}$$

对于 D_n

$$(\alpha_i, \alpha_k) = \begin{cases} \dfrac{1}{2n-2} & i = k, \\ -\dfrac{1}{4n-4} & |i-k| = 1, \quad (1 \leqslant i, k \leqslant n-1) \\ 0 & |i-k| > 1, \end{cases}$$

$$(\alpha_i, \alpha_n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2n-2} & i = n, \\ -\dfrac{1}{4n-4} & i = n-2, \\ 0 & i \neq n-2, n. \end{cases}$$

我們再計算基础根之間的夹角如下：

对于 A_n

$$\langle \alpha_i, \alpha_k \rangle = \begin{cases} 90^\circ & |i-k| \neq 1, \\ 120^\circ & |i-k| = 1. \end{cases}$$

对于 B_n

$$\langle\alpha_i,\alpha_k\rangle=\begin{cases}90^\circ & |i-k|\neq 1,\\ 120^\circ & |i-k|=1,\end{cases}\quad(1\leqslant i,k\leqslant n-1)$$

$$\langle\alpha_i,\alpha_n\rangle=\begin{cases}90^\circ & i<n-1,\\ 135^\circ & i=n-1.\end{cases}$$

对于 C_n

$$\langle\alpha_i,\alpha_k\rangle=\begin{cases}90^\circ & |i-k|\neq 1,\\ 120^\circ & |i-k|=1.\end{cases}\quad(1\leqslant i,k\leqslant n-1)$$

$$\langle\alpha_i,\alpha_n\rangle=\begin{cases}90^\circ & i<n-1,\\ 135^\circ & i=n-1.\end{cases}$$

对于 D_n

$$\langle\alpha_i,\alpha_k\rangle=\begin{cases}90^\circ & |i-k|\neq 1,\\ 120^\circ & |i-k|=1,\end{cases}\quad(1\leqslant i,k\leqslant n-1)$$

$$\langle\alpha_i,\alpha_n\rangle=\begin{cases}90^\circ & i\neq n-2,\\ 120^\circ & i=n-2.\end{cases}$$

作为定理 2 的系理的一个应用，我們来証明 $A_3\approx D_3$. 我們有

$$\Pi(A_3)=\{e_1-e_2,\ e_2-e_3,\ e_3-e_4\},$$

$$(e_i,\ e_j)=\delta_{ij}\frac{1}{2m}=\delta_{ij}\frac{1}{8},$$

于是

$$(e_1-e_2,\ e_1-e_2)=(e_2-e_3,\ e_2-e_3)$$
$$=(e_3-e_4,\ e_3-e_4)=\frac{1}{4},$$

$$(e_1-e_2,\ e_2-e_3)=(e_2-e_3,\ e_3-e_4)=-\frac{1}{8},$$

$$(e_1-e_2,\ e_3-e_4)=0.$$

又有

$$\Pi(D_3)=\{e_1-e_2,\ e_2-e_3,\ e_2+e_3\},$$

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}\frac{1}{4n-4} = \delta_{ij}\frac{1}{8},$$

于是

$$(e_1 - e_2, e_1 - e_2) = (e_2 - e_3, e_2 - e_3)$$
$$= (e_2 + e_3, e_2 + e_3) = \frac{1}{4},$$

$$(e_1 - e_2, e_2 - e_3) = (e_1 - e_2, e_2 + e_3) = -\frac{1}{8},$$

$$(e_2 - e_3, e_2 + e_3) = 0.$$

因此可以建立从 $\Pi(A_3)$ 到 $\Pi(D_3)$ 的合同映射：

$$e_1 - e_2 \to e_2 - e_3,$$
$$e_2 - e_3 \to e_1 - e_2,$$
$$e_3 - e_4 \to e_2 + e_3.$$

这就証明了 $A_3 \approx D_3$.

类似地可以証明 $B_2 \approx C_2$.

§3. Weyl 羣

設 Σ 是个 σ 系，$\alpha \in \Sigma$，于是

$$\xi \to \xi - \frac{2(\xi, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha, \quad (\xi \in R^m) \tag{1}$$

就是 Σ 所属的欧氏空間 R^m 中对于超平面

$$P_\alpha^*: (\xi, \alpha) = 0$$

的反射，称为由 α 所决定的反射，記作 S_α. 設 Σ 的一組基础向量系是 $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$，則 Σ 属于由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 所张成的 n 維欧氏空間 R^n. R^n 在 R^m 中有一正交补 R^{m-n}，卽 R^{m-n} 由 R^m 中一切与 R^n 中每一向量都正交的向量組成. 显然 $R^{m-n} \subset P_\alpha^*$，因此 R^{m-n} 中的向量在反射 S_α 之下皆保持不动，所以可以把 S_α 簡单地看作 R^n 中的一个反射，以下我們总作此約定. 于是 S_α 是 n 維欧氏空間 R^n 中的正交变换而 $\det S_\alpha = -1$. 一切 $S_\alpha(\alpha \in \Sigma)$ 生成

一羣，称为 σ 系 Σ 的 Weyl 羣[1]，記作 W. 自然 W 中的元素都是正交变换.

定理 5. σ 系 Σ 的 Weyl 羣可看作作用在 Σ 中的向量上的一个置換羣，因而是有限羣.

証. 在(1)中取 $\xi=\beta\in\Sigma$，則

$$S_\alpha(\beta)=\beta-\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha.$$

如 $\beta=\pm\alpha$，自然有 $S_\alpha(\alpha)=-\alpha$. 如 $\beta\neq\pm\alpha$，設 p 和 q 为最大非負整数使 $\beta+k\alpha\,(-p\leqslant k\leqslant q)$ 都属于 Σ，于是根据 σ 系的定义有

$$\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=-(q-p).$$

因此 $S_\alpha(\beta)=\beta+(q-p)\alpha\in\Sigma$. 这証明了每个 S_α 皆引起 Σ 中向量的一个置換. 因 W 由 $S_\alpha(\alpha\in\Sigma)$ 生成，故 W 中每个元素皆引起 Σ 中向量的一个置換.

又，W 中两个元素 S, T 如果引起 Σ 中向量上的同一置換，則 $S^{-1}T$ 必将 Σ 中每个向量保持不动；特别将 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 保持不动. 但 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 綫性无关，故 $S^{-1}T$ 将 R^n 中每个向量保持不动，即 $S^{-1}T=I$（恆同变換），$S=T$. 这証明了，W 可看作作用在 Σ 中的向量上的一个置換羣，因而是有限羣.

半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的根系的 Weyl 羣簡称作半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 羣. 設 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数，根据以上的定义，$\mathfrak{g}$ 的 Weyl 羣 W 是由 $\mathfrak{h}_0^*$ 中对于垂直于根 α 的超平面 P_α^* 的反射

$$S_\alpha:\ \xi\to\xi-\frac{2(\xi,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha\quad(\xi\in\mathfrak{h}_0^*)$$

所生成之羣. 对偶地，也可以将 W 看作 $\mathfrak{h}_0$ 中对于垂直于根 α 的对偶元素 H_α 的超平面 P_α: $(H_\alpha,H)=\alpha(H)=0$ 的反射

---

1) 見第五章 79 頁脚注.

$$S_\alpha:\ H \to H - \frac{2(H, H_\alpha)}{(H_\alpha, H_\alpha)} H_\alpha \quad (H \in \mathfrak{h}_0)$$

所生成的羣．今后我們有时采用前一观点，有时采用后一观点．又，有时我們也把 W 看作是 $\mathfrak{h}^*$（或 $\mathfrak{h}$）中由一切根 α 所定之反射

$$\xi \to \xi - \frac{2(\xi, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha \left(或\ H \to H - \frac{2(H, H_\alpha)}{(H_\alpha, H_\alpha)} H_\alpha \right)$$

所生成之羣．显然，这时 W 中每个元素都将 $\mathfrak{h}_0^*$（或 $\mathfrak{h}_0$）映到自身之上．

我們来研究一下典型李代数的 Weyl 羣，并将它看作 $\mathfrak{h}_0^*$ 中的变換羣．

先从 A_n 开始．我們回忆，A_n 的根系是

$$\Sigma(A_n) = \{\lambda_i - \lambda_k,\ i \neq k,\ i, k = 1, 2, \cdots, m\} \ (m = n + 1),$$

而 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 是 m 維欧氏空間 R^m 中的一組正交基而其长度

$$(\lambda_i, \lambda_i) = \frac{1}{2m}, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

于是

$$\mathfrak{h}_0^*(A_n) = \left\{ \sum_1^m x_i\lambda_i \,\middle|\, x_i\ 为实数而\ \sum_1^m x_i = 0 \right\}.$$

設

$$x = x_1\lambda_1 + \cdots + x_i\lambda_i + \cdots + x_k\lambda_k + \cdots + x_m\lambda_m$$

是 $\mathfrak{h}_0^*$ 中任一向量．由根 $\lambda_i - \lambda_k$ 所定的反射是

$$x \to x - \frac{2(x, \lambda_i - \lambda_k)}{(\lambda_i - \lambda_k, \lambda_i - \lambda_k)} (\lambda_i - \lambda_k).$$

我們有

$$\frac{(x, \lambda_i - \lambda_k)}{(\lambda_i - \lambda_k, \lambda_i - \lambda_k)} = \frac{\dfrac{x_i - x_k}{2m}}{\dfrac{1}{m}} = \frac{x_i - x_k}{2},$$

因之由 $\lambda_i - \lambda_k$ 所决定的反射是

$$x = x_1\lambda_1 + \cdots + x_i\lambda_i + \cdots + x_k\lambda_k + \cdots + x_m\lambda_m$$
$$\to x_1\lambda_1 + \cdots + x_k\lambda_i + \cdots + x_i\lambda_k + \cdots + x_m\lambda_m,$$

即它将 x 中 λ_i 和 λ_k 的系数互换．因此 A_n 的 Weyl 羣可看作 m

个文字的对称羣.

再研究 B_n 的 Weyl 羣. 我們有

$$\Sigma(B_n)=\{\pm\lambda_i\pm\lambda_k\ (i<k),\ \pm\lambda_i,\ i,k=1,2,\cdots,n\},$$

而 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是 $\mathfrak{h}_0^*(B_n)$ 的一組正交基,其長为

$$(\lambda_i,\lambda_i)=\frac{1}{4n-2},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

設

$$x=x_1\lambda_1+\cdots+x_n\lambda_n,\quad x_i\text{ 为实数}$$

为 $\mathfrak{h}_0^*(B_n)$ 中任一向量,計算

$$\frac{(x,\pm\lambda_i\pm\lambda_k)}{(\pm\lambda_i\pm\lambda_k,\pm\lambda_i\pm\lambda_k)}=\frac{\dfrac{\pm x_i\pm x_k}{4n-2}}{\dfrac{2}{4n-2}}=\frac{\pm x_i\pm x_k}{2},$$

$$\frac{(x,\pm\lambda_i)}{(\pm\lambda_i,\pm\lambda_i)}=\frac{\dfrac{\pm x_i}{4n-2}}{\dfrac{1}{4n-2}}=\pm x_i.$$

因此由 $\pm\lambda_i\pm\lambda_k$ 所决定的反射是

$$x=x_1\lambda_1+\cdots+x_n\lambda_n\to x_1\lambda_1+\cdots+x_k\lambda_i+\cdots+x_i\lambda_k+\cdots+x_n\lambda_n$$

$$\text{或 } x_1\lambda_1+\cdots-x_k\lambda_i+\cdots-x_i\lambda_k+\cdots+x_n\lambda_n,$$

而由 $\pm\lambda_i$ 所决定的反射是

$$x=x_1\lambda_1+\cdots+x_n\lambda_n\to x_1\lambda_1+\cdots-x_i\lambda_i+\cdots+x_n\lambda_n.$$

因此 B_n 的 Weyl 羣可看作是由一切将 n 个文字作任意置換并同时改变其中任意个文字的符号的变換所組成的羣.

再研究 C_n 的 Weyl 羣. 我們有

$$\Sigma(C_n)=\{\pm\lambda_i\pm\lambda_k\,(i<k),\ \pm2\lambda_i,\ i,k=1,2,\cdots,n\}$$

而 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\mathfrak{h}_0^*(C_n)$ 的一組正交基,其長为

$$(\lambda_i,\lambda_i)=\frac{1}{4n+4},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

設

$$x = x_1\lambda_1 + \cdots + x_n\lambda_n,\ x_i \text{ 为实数}$$

为 $\mathfrak{h}_0^*(C_n)$ 中任意向量,計算

$$\frac{(x,\ \pm\lambda_i\pm\lambda_k)}{(\pm\lambda_i\pm\lambda_k,\ \pm\lambda_i\pm\lambda_k)} = \frac{\pm x_i \pm x_k}{2},$$

$$\frac{(x,\ \pm 2\lambda_i)}{(\pm 2\lambda_i,\ \pm 2\lambda_i)} = \frac{\pm\ x_i}{2}.$$

因此由 $\pm\lambda_i\pm\lambda_k$ 所决定的反射是

$$x = x_1\lambda_1 + \cdots + x_n\lambda_n \to x_1\lambda_1 + \cdots + x_k\lambda_i + \cdots + x_i\lambda_k + \cdots + x_n\lambda_n$$

$$\text{或 } x_1\lambda_1 + \cdots - x_k\lambda_i + \cdots - x_i\lambda_k + \cdots + x_n\lambda_n,$$

而由 $\pm 2\lambda_i$ 所决定的反射是

$$x = x_1\lambda_1 + \cdots + x_n\lambda_n \to x_1\lambda_1 + \cdots - x_i\lambda_i + \cdots + x_n\lambda_n.$$

因此 C_n 的 Weyl 羣与 B_n 的一样.

最后研究 D_n 的 Weyl 羣. 我們有

$$\Sigma(D_n) = \{\pm\lambda_i\pm\lambda_k,\ i<k,\ i,\ k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n\},$$

而 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 $\mathfrak{h}_0^*(D_n)$ 的一組正交基,其长为

$$(\lambda_i,\ \lambda_i) = \frac{1}{4n-4}.$$

設

$$x = x_1\lambda_1 + \cdots + x_n\lambda_n,\ x_i \text{ 为实数}$$

为 $\mathfrak{h}_0^*(D_n)$ 中任一向量,計算

$$\frac{(x,\ \pm\lambda_i\pm\lambda_k)}{(\pm\lambda_i\pm\lambda_k,\ \pm\lambda_i\pm\lambda_k)} = \frac{\pm x_i \pm x_k}{2}.$$

因此由 $\pm\lambda_i\pm\lambda_k$ 所决定的反射是

$$x = x_1\lambda_1 + \cdots + x_n\lambda_n \to x_1\lambda_1 + \cdots + x_k\lambda_i + \cdots + x_i\lambda_k + \cdots + x_n\lambda_n$$

$$\text{或 } x_1\lambda_1 + \cdots - x_k\lambda_i + \cdots - x_i\lambda_k + \cdots + x_n\lambda_n.$$

因此 D_n 的 Weyl 羣可看作是一切将 n 个文字作任意置換并同时改变其中偶数个文字的符号的变换所組成的羣.

§4. Weyl 羣的性質

設 Σ 为一 σ 系，而 $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 是它的一組基础向量系，則 Σ 可看作含在由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 所张成的 n 維欧氏空間 R^n 中。因此 Σ 的 Weyl 羣 W 中的元素都是 R^n 中的正交变换，而 W 也可看作是作用在 Σ 中向量之上的一个置換羣，因而是有限羣。

設 $\alpha \in \Sigma$，以 P_α^* 表 R^n 中方程为

$$(\alpha, \xi) = 0$$

的超平面。令

$$K = R^n \setminus \bigcup_{\alpha \in \Sigma} P_\alpha^*,$$

即 K 为从 R^n 中除去属于任一超平面 $P_\alpha^* (\alpha \in \Sigma)$ 的点之后所余之集。我們把 K 的連通分支（卽极大連通子集）称为 R^n 中（相对于 Σ 而言）的 Weyl 間。我們先証明

引理 2. 設 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 Σ 的一組基础向量系，則集合

$$C_0 = \{\xi \in R^n \text{ 使得 } (\alpha_i, \xi) > 0, \text{ 对 } i = 1, 2, \cdots, n\}$$

是 R^n 的一个 Weyl 間，而且对任意 $\alpha \in \Sigma$，或者 $(\alpha, \xi) > 0$ 对一切 $\xi \in C_0$，或者 $(\alpha, \xi) < 0$ 对一切 $\xi \in C_0$。

証. 利用 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 在 R^n 中引进一次序，使 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是这次序所定之素向量系。設 $\alpha \in \Sigma_+$，則有 $\alpha = \sum_{i=1}^{n} m_i \alpha_i$，其中 m_i 是非負整数而不全为 0。于是对任一 $\xi \in C_0$ 都有

$$(\alpha, \xi) = \sum_{i=1}^{m} m_i (\alpha_i, \xi) > 0.$$

同理，如 $\alpha \in \Sigma_-$，則对任一 $\xi \in C_0$ 都有 $(\alpha, \xi) < 0$。这証明了引理 2 的第二个断言。由此推出 $C_0 \subset K$。

我們再証明 C_0 是連通的。設 ξ_1 和 ξ_2 是 C_0 中任意二点。連接 ξ_1 和 ξ_2 的綫段上的点是 $\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2 \ (0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$。显然

当 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 时，

$$(\alpha_i, \lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2) = \lambda(\alpha_i, \xi_1) + (1-\lambda)(\alpha_i, \xi_2) > 0.$$

因此 $\lambda\xi_1 + (1-\lambda)\xi_2 \in C_0\ (0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$，故 C_0 是連通的.

最后我們来証明 C_0 是极大連通的. 設 $\xi' \in K$, $\xi' \notin C_0$ 而 ξ' 可与 C_0 中一点 ξ_0 用 K 中連續曲綫 $l(t)\ (0 \leqslant t \leqslant 1)$ 相連，而 $l(0) = \xi'$, $l(1) = \xi_0$. 因 $\xi' \notin C_0$，故至少有一素根，設为 α_1 使 $(\alpha_1, \xi') < 0$. 由于 $(\alpha_1, l(t))$ 是 t 的連續函数，而

$$(\alpha_1, l(0)) = (\alpha_1, \xi') < 0,\ (\alpha_1, l(1)) = (\alpha_1, \xi_0) > 0,$$

故有 $t = t_0\ (0 < t_0 < 1)$ 使 $(\alpha_1, l(t_0)) = 0$. 于是 $l(t_0) \notin K$，这与 $l(t)$ 是 K 中連續曲綫的假設相抵触. 因此 C_0 是极大連通的. 于是 C_0 是个 Weyl 間.

对于任一基础向量 α_i，記 $S_i = S_{\alpha_i}$. 以 W' 表由 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 生成的羣，則 W' 是 W 的子羣，而且我們有

引理 3. W' 可迁地作用在諸 Weyl 間之上，即如 C_1 是任一 Weyl 間，則有 $S \in W'$ 使 $C_0 = S(C_1)$.

証. 首先我們証明，W' 中任一元必将 Weyl 間映到 Weyl 間. 这只要証明：如 ξ_1 和 ξ_2 是 K 中任意两点，它們可用 K 中一条連續曲綫 $l(t)\ (0 \leqslant t \leqslant 1)$ 相連，則 $S(\xi_1)$ 和 $S(\xi_2)$ 也可用 K 中一条連續曲綫相連. 实际上，$S(l(t))\ (0 \leqslant t \leqslant 1)$ 即是連接 $S(\xi_1)$ 和 $S(\xi_2)$ 的連續曲綫. 又因 S 为正交变換并引起 Σ 中向量的一个置换，故对一切 $\alpha \in \Sigma$，

$$(\alpha, S(l(t))) = (S^{-1}(\alpha), l(t)) \neq 0.$$

因此 $S(l(t)) \in K\ (0 \leqslant t \leqslant 1)$.

因此要証明引理 3，只要証明对 C_1 中任一給定的点 ξ_1，有 $S \in W'$ 存在使 $S(\xi_1) \in C_0$ 即可.

考察一切 $S(\xi_1)\ (S \in W')$. 設 ξ_0 为 C_0 中任一給定的点，于是 $S(\xi_1)\ (S \in W')$ 中必有一点与 ξ_0 的距离最近. 設此点为 $S_0(\xi_1)$，即

$$\|S_0(\xi_1) - \xi_0\| \leqslant \|S(\xi_1) - \xi_0\| \quad 对一切 S \in W',$$

而其中

$$\|\xi-\eta\|=\sqrt{(\xi-\eta,\xi-\eta)},\ \xi,\eta\in R^n.$$

我們断言 $S_0\xi_1\in C_0$. 否則，必有一素根 α_i 使

$$(\alpha_i, S_0\xi_1)<0.$$

于是

$$S_i(S_0\xi_1)=S_0\xi_1-\frac{2(\alpha_i, S_0(\xi_1))}{(\alpha_i,\alpha_i)}\alpha_i,$$

而

$$\|S_iS_0(\xi_1)-\xi_0\|=\left\|S_0(\xi_1)-\xi_0-\frac{2(\alpha_i, S_0(\xi_1))}{(\alpha_i,\alpha_i)}\alpha_i\right\|$$

$$=\left\{\|S_0(\xi_1)-\xi_0\|^2+\left\|\frac{2(\alpha_i, S_0(\xi_1))}{(\alpha_i,\alpha_i)}\alpha_i\right\|^2-\right.$$

$$\left.-2\left(S_0(\xi_1)-\xi_0, \frac{2(\alpha_i, S_0(\xi_1))}{(\alpha_i,\alpha_i)}\alpha_i\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left\{\|S_0(\xi_1)-\xi_0\|^2+\left\|\frac{2(\alpha_i, S_0(\xi_1))}{(\alpha_i,\alpha_i)}\alpha_i\right\|^2-\right.$$

$$\left.-\frac{4(\alpha_i, S_0(\xi_1))}{(\alpha_i,\alpha_i)}(S_0(\xi_1)-\xi_0,\alpha_i)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left\{\|S_0(\xi_1)-\xi_0\|^2+\frac{4(\alpha_i, S_0(\xi_1))^2}{(\alpha_i,\alpha_i)}-\frac{4(\alpha_i, S_0(\xi_1))^2}{(\alpha_i,\alpha_i)}+\right.$$

$$\left.+\frac{4(\alpha_i, S_0(\xi_1)(\alpha_i,\xi_0))}{(\alpha_i,\alpha_i)}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$<\|S_0(\xi_1)-\xi_0\|,$$

这是因为 $(\alpha_i, S_0(\xi_1))<0$, $(\alpha_i,\xi_0)>0$. 这就是説，$S_iS_0\xi_1$ 比 $S_0\xi_1$ 距 ξ_0 还近. 这是矛盾的，因此一定有 $S_0\xi_1\in C_0$.

引理 4. 設 C_1 是任一 Weyl 間，則 Σ 中必有 n 个綫性无关的向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 具有性質

$$C_1=\{\xi\in R^n \text{ 使 } (\beta_i,\xi)>0 \text{ 对 } i=1,2,\cdots,n\},$$

而 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 由 C_1 唯一确定. 实际上，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 也是一組基础向量系.

証. 根据引理 3, 有 $S\in W'$ 使 $C_0=S(C_1)$, 則 $S^{-1}(\alpha_1),\cdots,$ $S^{-1}(\alpha_n)$ 就是具有引理所要求的性質的 n 个根。实际上,

$$\begin{aligned} C_1=S^{-1}(C_0)&=S^{-1}\{\xi\in R^n \text{ 使 } (\alpha_i,\xi)>0 \text{ 对 } i=1,2,\cdots,n\}\\ &=\{S^{-1}(\xi)\in R^n \text{ 使 } (\alpha_i,\xi)>0 \text{ 对 } i=1,2,\cdots,n\}\\ &=\{S^{-1}(\xi)\in R^n \text{ 使 } (S^{-1}(\alpha_i),S^{-1}(\xi))>0 \text{ 对 } i=1,2,\cdots,n\}\\ &=\{\xi\in R^n \text{ 使 } (S^{-1}(\alpha_i),\xi)>0 \text{ 对 } i=1,2,\cdots,n\}. \end{aligned}$$

因 S 引起 Σ 中向量的一个置换, 故 $S^{-1}(\alpha_1), S^{-1}(\alpha_2),\cdots,S^{-1}(\alpha_n)$ 也是一組基础向量系。

要証 $S^{-1}(\alpha_1), S^{-1}(\alpha_2),\cdots,S^{-1}(\alpha_n)$ 由 C_1 唯一确定, 只需証 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 由 C_0 唯一确定即可. 我們已知

$$C_0=\{\xi\in R^n \text{ 使 } (\alpha,\xi)>0 \text{ 对一切 } \alpha\in\Sigma_+\}.$$

因 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 綫性无关,所以$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$的任一眞子集不能用来确定 C_0. 現在設 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 是一組綫性无关的根,而

$$C_0=\{\xi\in R^n \text{ 使 } (\beta_i,\xi)>0 \text{ 对 } i=1,2,\cdots,m\},$$

自然 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 都是正根, 而且 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 的任何眞子集不能用来确定 C_0. 于是可选取 $\xi_1\in R^n$ 使 $(\beta_i,\xi_1)>0$ 对 $i=2,3,\cdots,m$ 而 $(\beta_1,\xi_1)\leqslant 0$; 于是 $\xi_1\notin C_0$. 选 $\xi_0\in C_0$. 那么連接 ξ_0 和 ξ_1 的綫段必通过 $P^*_{\beta_1}$: $(\beta_1,\xi)=0$. 設 ξ_2 是連接 ξ_0 和 ξ_1 的綫段上的那个落在 $P^*_{\beta_1}$ 上的点, 則$(\beta_i,\xi_2)>0$ 对 $i=2,3,\cdots,m$ 而$(\beta_1,\xi_2)=0$. 可选 ξ_3 使 $(\beta_1,\xi_3)=0$ 而 $(\alpha,\xi_3)\neq 0$ 对一切 $\alpha\in\Sigma_+$ 而 $\alpha\neq\beta_1$. 于是可以找到一个实数 t, 使 $(\beta_i,\xi_2+t\xi_3)>0$ 对 $i=2,3,\cdots,m$, $(\beta_1,\xi_2+t\xi_3)=0$ 及 $(\alpha,\xi_2+t\xi_3)\neq 0$ 对一切 $\alpha\in\Sigma_+$ 而 $\alpha\neq\beta_1$. 令 $\xi_4=\xi_2+t\xi_3$, 則連接 ξ_0 和 ξ_4 的綫段上的点都属于 C_0; 因 $(\alpha,\xi_4)\neq 0$ 对一切 $\alpha\in\Sigma_+$ 而 $\alpha\neq\beta_1$, 故 $(\alpha,\xi_4)>0$ 对一切 $\alpha\in\Sigma_+$ 而 $\alpha\neq\beta_1$. 因 $\xi_4\notin C_0$, 故 β_1 必为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 中之一。这証明了 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 由 C_0 唯一确定.

我們把超平面 $P^*_{\alpha_1}, P^*_{\alpha_2},\cdots,P^*_{\alpha_n}$ 称为 Weyl 間 C_0 的墻, 或一般地, 如 Weyl 間 C_1 由綫性无关的根 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 所确定, 即

$$C_1 = \{\xi \in R^n \text{ 使 } (\beta_i, \xi) > 0 \text{ 对 } i = 1, 2, \cdots, n\},$$

則称 $P^*_{\beta_1}, P^*_{\beta_2}, \cdots, P^*_{\beta_n}$ 为 Weyl 間 C_1 的墙.

引理 5. 对任一 $\alpha \in \Sigma$, P^*_α 必是某一 Weyl 間的墙.

證. 选 $\xi_1 \in P^*_\alpha$ 而 $(\beta, \xi_1) \neq 0$ 对一切 $\beta \in \Sigma$ 而 $\beta \neq \pm\alpha$. 設 $\xi_2 \notin P^*_\alpha$, 于是可选一适当小的实数 t, 使 (β, ξ_1) $(\beta, \xi_1 + t\xi_2) > 0$ 对一切 $\beta \in \Sigma$ 而 $\beta \neq \pm\alpha$. 这样一来, P^*_α 就是包有 $\xi_1 + t\xi_2$ 的 Weyl 間 C_1 的墙. 实际上, 設 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是一組綫性无关的根使

$$C_1 = \{\xi \in R^n \text{ 使 } (\beta_i, \xi) > 0 \text{ 对 } i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

如 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n \neq \pm\alpha$, 則从 $(\beta_i, \xi_1 + t\xi_2) > 0$ 对 $i = 1, 2, \cdots, n$ 推出 $(\beta_i, \xi_1) > 0$ 对 $i = 1, 2, \cdots, n$; 更由此推出 $(\alpha, \xi_1) \neq 0$. 矛盾.

引理 6. 設 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 Σ 的一組基础向量系, 利用这組向量在 R^n 中引进一个次序, 使这組向量是相对于这个次序的一組素向量系. 如果 $\alpha \in \Sigma_+$ 而 $\alpha \neq \alpha_i$, 則 $S_{\alpha_i}(\alpha) > 0$, 但是 $S_{\alpha_i}(\alpha_i) = -\alpha_i$.

證. 如果 $\alpha \in \Sigma_+$, 則 $\alpha = \sum_{i=1}^{n} m_i\alpha_i$, $m_i \geqslant 0$, 于是

$$S_{\alpha_i}(\alpha) = \alpha - \frac{2(\alpha, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}\alpha_i$$

$$= \sum_{j \neq i} m_j\alpha_j + \left(m_i - \frac{2(\alpha, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}\right)\alpha_i.$$

如 $\alpha \neq \alpha_i$, 就有 $j \neq i$ 使 $m_j > 0$, 于是 $S_{\alpha_i}(\alpha) > 0$. 但是显然有 $S_{\alpha_i}(\alpha_i) = -\alpha_i$.

定理 6. 設 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 σ 系 Σ 的一組基础向量系, 則反射 $S_i = S_{\alpha_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 生成 Σ 的 Weyl 羣 W, 而且 Σ 中任一向量 α 皆是某一基础向量 α_i 在某一 $S \in W$ 之下的象. 更进一步, W 是作用在 Σ 的諸 Weyl 間之上的正則可迁置換羣, 所謂正則是說, 如有 $S \in W$ 使 $S(C) = C$ 对某一 Weyl 間 C, 則 $S = 1$.

証. 設 α 是任一根，則 α 和 $-\alpha$ 是垂直于超平面 P_α^* 的仅有的二根. P_α^* 必是某一 Weyl 間 C_1 的墙. 設 $S \in W'$ 使 $S(C_0) = C_1$，于是必有一基础根 α_i 使 $SP_{\alpha_i}^* = P_\alpha^*$，因此 $S(\alpha_i) = \pm\alpha$. 如 $S(\alpha_i) = -\alpha$，則 $(S\ S_{\alpha_i})(\alpha_i) = S(-\alpha_i) = \alpha$. 因此总有 $S \in W'$ 使 $S\alpha_i = \alpha$. 于是 $S_\alpha = S\,S_i S^{-1}$. 因 $S_i, S \in W'$，故 $S_\alpha \in W'$. 因此 $W' = W$，这証明了 W 由 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 生成. 又根据引理 3，W' 可迁地作用在諸 Weyl 間之上，故 W 亦然.

最后需要証明 W 是作用在諸 Weyl 間之上的正則置換羣. 設有 $S \in W$ 有性質 $S(C) = C$，而 C 为某一 Weyl 間，我們要証明 $S = 1$. 因 W 可迁地作用在諸 Weyl 間之上，不仿設 $C = C_0$ 是由基础向量系 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 所确定者，卽

$$C = C_0 = \{\xi \in R^n \text{ 使 } (\alpha_i, \xi) > 0 \text{ 对 } i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

根据引理 4，$S(C_0) = C_0$ 这一条件与 S 引起基础向量系的一个置換等价，因而也与 S 引起正向量系的一个置換等价. 因 W 由 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 所生成，故可設 $S = S_{i_1} S_{i_2} \cdots S_{i_p}$，$1 \leqslant i_1, i_2, \cdots, i_p \leqslant n$. 假定当 S 可表成 $< p$ 个 S_i 的乘积时一定有 $S = 1$，我們来証明当 S 表成 p 个 S_i 的乘积时也有 $S = 1$.

令 $S' = S_{i_2} \cdots S_{i_p}$，則 $S = S_{i_1} S'$. 如果 $S' = 1$，則 $S(\alpha_{i_1}) = S_{i_1} S'(\alpha_{i_1}) = S_{i_1}(\alpha_{i_1}) = -\alpha_{i_1} < 0$. 与假設相违，因此一定有 $S' \neq 1$. 于是根据归納法假設有正向量 α 存在，使 $S'(\alpha) < 0$. 但是 $S(\alpha) = S_{i_1} S'(\alpha) > 0$，所以根据引理 6 有 $S'(\alpha) = -\alpha_{i_1}$. 现在設 β 是一个正根而 $S'(\beta) < 0$，那么由 $S(\beta) = S_i S'(\beta) > 0$，也有 $S'(\beta) = -\alpha_{i_1}$ 因此 $\beta = \alpha$. 于是我們証明了，如果 β 是一个正向量而 $\beta \neq \alpha$，那么一定有 $S'(\beta) > 0$. 我們再証明 α 一定是一个基础向量. 否則将 α 写作 $\alpha = \sum_{i=1}^{n} m_i \alpha_i$，$m_i \geqslant 0$，那么 $S'(\alpha) = \sum_i m_i S'(\alpha_i) > 0$. 矛盾，因此一定有一个 $j (1 \leqslant j \leqslant n)$ 使 $\alpha = \alpha_j$. 于是 $S'(\alpha_j) = -\alpha_{i_1} < 0$，对任意正向量 $\beta \neq \alpha_j$ 总有 $S'(\beta) > 0$.

令 $\beta_t = S_{i_t} S_{i_{t+1}} \cdots S_{i_p}(\alpha_j)$，$t = 2, 3, \cdots, p+1$，而 $\beta_{p+1} = \alpha_j$，

那么 $\beta_{p+1}=\alpha_j>0$ 而 $\beta_2=S'(\alpha_j)<0$. 因此有一个 $k(2<k\leqslant p+1)$ 存在，使 $\beta_k>0$ 而 $\beta_{k-1}<0$. 令 $S_{i_k}\cdots S_{i_p}=T$, $S_{i_2}\cdots S_{i_{k-2}}=T'$, 而当 $k=p+1$ 时，令 $T=I$. 于是 $S'(\alpha_j)=T'S_{i_{k-1}}T(\alpha_j)$ 而 $\beta_k=T(\alpha_j)>0$, $S_{i_{k-1}}T(\alpha_j)=\beta_{k-1}<0$. 仍根据引理 6 知 $T(\alpha_j)=\alpha_{i_{k-1}}$. 于是 $T^{-1}S_{i_{k-1}}T=S_j$, 因而 $S'=T'S_{i_{k-1}}T=T'TS_j$. 因 $S_j^2=1$, 故 $T'T(\alpha)=T'TS_j(S_j(\alpha))=S'(S_j(\alpha))$. 如 α 为正向量而 $\alpha\neq\alpha_j$, 則 $S_j(\alpha)>0$ 而且 $S_j(\alpha)\neq\alpha_j$, 那么根据上面所証明的关于 S' 的性質有 $S'(S_j(\alpha))>0$. 如 $\alpha=\alpha_j$, 則$S_j(\alpha)=-\alpha_j$, 于是 $S'(S_j(\alpha_j))=-S'(\alpha_j)=\alpha_{i_1}>0$. 因此 $T'T$ 总将正向量变到正向量. 但是 $T'T$ 是 $p-2$ 个 S_i 之积，故根据归納法假設一定有 $T'T=I$. 于是 $S'=T'TS_j=S_j$. 那么一方面我們有 $S'(\alpha_j)=-\alpha_{i_1}$, 另一方面又有 $S'(\alpha_j)=S_j(\alpha_j)=-\alpha_j$, 因此 $j=i_1$. 于是 $S=S_{i_1}S'=S_{i_1}^2=I$. 这就証明了 W 是作用在諸 Weyl 間之上的正則置換羣.

系理. 設 $S\in W$ 而 S 将正向量都变到正向量或将基础向量都变到基础向量，則 $S=1$.

根据我們关于 σ 系的 Weyl 羣的研究，我們有以下关于 σ 系以及半单李代数的性質.

定理 7. 設 Σ 为 σ 系，則 Σ 的任何两个基础向量系皆合同，而这个合同可扩充成 Σ 的一个自合同. 因之，合同的 σ 系的任意两个基础向量系皆合同，而具不合同的基础向量系的 σ 系必不合同.

証. 只要証第一个断言即可. 設 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 和 $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$ 是 Σ 的两个基础向量系，于是它們分别决定两个 Weyl 間:

$$C_\alpha=\{\xi\in R^n \text{ 使 } (\alpha_i,\xi)>0 \text{ 对 } i=1,2,\cdots,n\},$$

$$C_\beta=\{\xi\in R^n \text{ 使 } (\beta_i,\xi)>0 \text{ 对 } i=1,2,\cdots,n\}.$$

根据定理 6，有 $S\in W$ 使 $S(C_\alpha)=C_\beta$. 再根据引理 4 知，重排 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 后可設 $S\alpha_i=\beta_i(i=1,2,\cdots,n)$. 因 S 为正交变换，

故 S 为映 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 成 $\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n\}$ 的合同，因而也是 Σ 的自合同。

定理 8. 半单李代数的任意两組基础根系皆合同；换言之，半单李代数的基础根系在合同的意义下是唯一确定的．因此两个半单李代数同构当且仅当它們各自的一組基础根系彼此合同．

这是第五章定理 7，本章定理 3 和定理 7 的直接推論．

基于定理 8 以及定理 4 的系理知，要决定一切两两不同构的单李代数，只需定出一切两两不相似的单 π 系．然后对这組两两不相似的单 π 系中的每一个，定出一个单李代数，而它的基础根系与給定的这个单 π 系相似卽可．这就是下面一章所要做的事．

最后我們再作一注記．当把半单代数 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 羣 W 看作是 $\mathfrak{h}_0$ 中对于超平面 P_α：$(\alpha, H) = \alpha(H) = 0$ $(\alpha \in \Sigma)$ 的反射所生成的 Weyl 羣时，我們把集

$$\mathfrak{h}_0 \setminus \bigcup_{\alpha \in \Sigma} P_\alpha$$

的連通分支亦称为 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 間．这时同样有 Weyl 羣是作用在諸 Weyl 間之上的正則置换羣．任一 Weyl 間 C 由唯一的一組基础根系 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 所确定：

$$C = \{H \in \mathfrak{h}_0 \text{ 使 } \alpha_i(H) > 0 \text{ 对 } i = 1, 2, \cdots, n\},$$

而且 Weyl 羣由 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 所生成，这时

$$S_i(H) = H - \frac{2(H, H_{\alpha_i})}{(H_{\alpha_i}, H_{\alpha_i})} H_{\alpha_i}, \quad H \in \mathfrak{h}_0.$$

第七章　单代数的分类

§1. π 系的图

我們回忆一下 π 系的定义．欧氏空間中的一个向量集 Π 称为一个 π 系，如果

1° Π 由綫性无关的向量組成；

2° 如 $\alpha, \beta \in \Pi$, $\alpha \neq \beta$, 則 $\dfrac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ 是个負的整数或 0.

而一个 Π 系称为单 π 系，如果它不能分解成两个互相正交的子 π 系的併.

現在設 Π 是个 π 系，$\alpha, \beta \in \Pi$ 而 $\alpha \neq \beta$. 以 $\langle \alpha, \beta \rangle$ 表 α 与 β 的夹角，根据第五章定理 4 的証明，有

$$\cos \langle \alpha, \beta \rangle = \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{r}, \quad \varepsilon = \pm 1, r = 0, 1, 2, 3. \tag{1}$$

但現在

$$\cos \langle \alpha, \beta \rangle = \frac{(\alpha, \beta)}{\sqrt{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)}} \leqslant 0,$$

故 (1) 式中 $\varepsilon = -1$. 因此这时 $\langle \alpha, \beta \rangle$ 只能取 90°, 120°, 135°, 150° 这四个值之一. 再設 $(\alpha, \alpha) \leqslant (\beta, \beta)$, 仍根据第五章定理 4 的証明有

如 $\langle \alpha, \beta \rangle = 120^\circ$, 則 $(\beta, \beta) = (\alpha, \alpha)$,

$$\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = -1, \ \frac{2(\beta, \alpha)}{(\beta, \beta)} = -1;$$

如 $\langle \alpha, \beta \rangle = 135^\circ$, 則 $(\beta, \beta) = 2(\alpha, \alpha)$,

$$\frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = -2, \ \frac{2(\beta, \alpha)}{(\beta, \beta)} = -1;$$

如 $\langle\alpha,\beta\rangle=150^\circ$，則 $(\beta,\beta)=3(\alpha,\alpha)$，

$$\frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=-3,\ \frac{2(\beta,\alpha)}{(\beta,\beta)}=-1.$$

对 π 系 Π 中每个向量，我們令平面上一个点与之相对应．两个这样的点我們看它們的夹角是 120°，135° 或 150°，而用一条綫，两条綫和三条綫連接起来；而两个正交的向量对应的点則不用綫加以連接．这样得出来的一个图称为 π 系 Π 的角图．如果还在图的每个点下面注上与之相应的向量的长度的平方 (α,α)，就得到 π 系 Π 的图．合同的 π 系有相同的图．

显而易見，我們有

引理 1. π 系 Π 的图是連通的当且仅当 Π 是单 π 系．

以后将証明，单 π 系的图中只有两种长度的向量，它們的长度平方之比是 2:1 或 3:1．这样，有时我們用黑点代表单 π 系 Π 的图中較短的向量，而用小圓圈代表单 π 系 Π 的图中較长的向量，并将标在点下面的向量长度的平方略去，我們就得到单 π 系 Π 的 Dynkin 图 $\Gamma(\Pi)$．具有同一 Dynkin 图的两个单 π 系是相似的．单代数的基础根系的 Dynkin 图亦称单代数的 Dynkin 图．

最后，我們列出典型代数 A_n, B_n, C_n, D_n 的图及 Dynkin 图．

代数	图		Dynkin 图
A_n	○—○—○—○…○—○ λ λ λ λ λ λ	$\left(\lambda=\frac{1}{n+1}\right)$	●—●—●…●—●
B_n	○═○—○—○…○—○ $\lambda/2$ λ λ λ λ λ	$\left(\lambda=\frac{1}{2n-1}\right)$	●═○—○…○—○
C_n	○═○—○—○…○—○ 2λ λ λ λ λ λ	$\left(\lambda=\frac{1}{2n+2}\right)$	○═●—●…●—●
D_n	λ○, λ○ >○—○—○…○—○ λ λ λ λ λ	$\left(\lambda=\frac{1}{2n-2}\right)$	●, ● >●—●…●—●

§ 2. 单 π 系的分类[1)]

我們先来研究单 π 系的角图必須是怎样的形状．

1) 見邓金，半单純李氏代数的結构，北京，1954 及 Seminaire Sophus Lie, Paris, 1955．

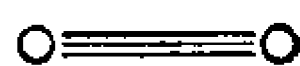
設 $\Pi=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$. 如 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 n 个实变数，則

$$\left(\sum_1^n \lambda_i\alpha_i, \sum_1^n \lambda_i\alpha_i\right) = \sum_{i,j=1}^n (\alpha_i, \alpha_j)\lambda_i\lambda_j \tag{1}$$

是个定正二次型，因为它是欧氏空間中向量长度的平方.

以下我們用同一文字来代表 Π 中向量及角图中代表它的点.

引理 2. 角图



是唯一含有三重綫段的单 π 系的角图.

証. 設 Π 的角图中 α_1 和 α_2 由三重綫段相連. 如角图中还有其余的点，由于角图是連通的，可以設有 α_3 与 α_1 或 α_2 相連. 为确定起見，設 α_3 与 α_2 相連. 从初等几何我們知道，对于三个綫性无关的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 来說，

$$\langle\alpha_1, \alpha_2\rangle + \langle\alpha_2, \alpha_3\rangle + \langle\alpha_3, \alpha_1\rangle < 360^\circ.$$

現在 $\langle\alpha_1, \alpha_2\rangle = 150^\circ$, $\langle\alpha_2, \alpha_3\rangle \geqslant 120^\circ$, $\langle\alpha_3, \alpha_1\rangle \geqslant 90^\circ$. 这是不可能的.

以下从引理 3 到引理 6，我們都假定单 π 系 Π 的角图中仅含单重綫段和双重綫段.

引理 3. 单 π 系 Π 的角图不能含閉路(因而是树).

証. 設 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in \Pi$，而它們在角图中組成一个閉路，則 $(\alpha_1, \alpha_2) \neq 0$, $(\alpha_2, \alpha_3) \neq 0, \cdots, (\alpha_{k-1}, \alpha_k) \neq 0$, $(\alpha_k, \alpha_1) \neq 0$. 以 $\|\alpha_i\| = \sqrt{(\alpha_i, \alpha_i)}$，幷命 $\alpha_{k+1} = \alpha_1$，則

$$\left(\sum_1^k \frac{1}{\|\alpha_i\|}\alpha_i, \sum_1^k \frac{1}{\|\alpha_i\|}\alpha_i\right) \leqq \sum_1^k \frac{1}{\|\alpha_i\|^2}(\alpha_i, \alpha_i) +$$

$$+ 2\sum_{i=1}^k \frac{1}{\|\alpha_i\|\|\alpha_{i+1}\|}(\alpha_i, \alpha_{i+1})$$

$$= k + 2\sum_{i=1}^k \cos\langle\alpha_i, \alpha_{i+1}\rangle \leqslant k - k = 0.$$

这与(1)的定正性相违.

推論. 設 Π' 是单 π 系 Π 的子 π 系，而且也是单的. 再設

$\beta \in \Pi - \Pi'$，并設β与Π'中一点相連，則β只与Π'中唯一的一点相連.

引理 4. 单π系Π的角图中任意一点都不能有三条以上的綫与之相連。

証。 設$\alpha \in \Pi$，并設共有$k > 3$条綫与α相連. 設$\alpha_1, \cdots, \alpha_l (l \leqslant k)$是$\Pi$中与$\alpha$相連的一切点，于是，根据引理3的推論，$\alpha_1, \cdots, \alpha_l$两两垂直. 以$V$表$\alpha$及$\alpha_1, \cdots, \alpha_l$所张成的綫性子空間. 在$V$中选取与$\alpha_1, \cdots, \alpha_l$都正交的一个向量$\gamma \neq 0$. 由于$\gamma, \alpha_1, \cdots, \alpha_l$两两垂直，故根据勾股定理有

$$\cos^2\langle\gamma, \alpha\rangle + \sum_{i=1}^{l} \cos^2\langle\alpha_i, \alpha\rangle = 1.$$

因α不与$\alpha_1, \cdots, \alpha_l$綫性相关，$\gamma$不与$\alpha_1$正交，故

$$\sum_{1}^{l} 4\cos^2\langle\alpha_i, \alpha\rangle < 4. \tag{2}$$

如α_i与α用t条綫相連，則$4\cos^2\langle\alpha_i, \alpha\rangle = t$，因此

$$\sum_{1}^{l} 4\cos^2\langle\alpha_i, \alpha\rangle = k.$$

这与(2)式相抵触，故$k \leqslant 3$.

Π的角图中的点$\alpha_1, \cdots, \alpha_k$称为一个鏈，如果$\alpha_1$与$\alpha_2$相連，$\alpha_2$与$\alpha_3$相連，$\cdots$，$\alpha_{k-1}$与$\alpha_k$相連，而其余的任意两个$\alpha_i$和$\alpha_j$都不相連. 一个鏈$C = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$称为**簡单的**，如果連接$\alpha_i$和$\alpha_{i+1}(i = 1, \cdots, k-1)$的都是单重綫段.

引理 5. 設C是单π系Π的一个簡单鏈，$C = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$. 命

$$\Pi' = \{\Pi \setminus C, \alpha = \sum_{1}^{k} \alpha_i\},$$

則Π'也是个单π系，而Π'的角图可以由Π的角图将鏈$C = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$縮为一点$\alpha$，并将每个与某一个$\alpha_i$在$\Pi$中用$t$重綫段相連的点$\beta \in \Pi \setminus C$以$t$重綫段相連到$\alpha$而得到.

証. 自然Π'中向量皆綫性无关. 其次

$$
\begin{aligned}
(\alpha, \alpha) &= \left(\sum_{1}^{k} \alpha_i, \sum_{1}^{k} \alpha_i\right) \\
&= \sum_{1}^{k-1} \{(\alpha_i, \alpha_i) + 2(\alpha_i, \alpha_{i+1})\} + (\alpha_k, \alpha_k) \\
&= (\alpha_k, \alpha_k) = (\alpha_l, \alpha_l).
\end{aligned}
$$

設 $\beta \in \Pi \setminus C$ 而 β 与 α_l 以 t 重綫段相連，則根据引理 3 的推論，β 不能与其余的 α_i 相連，因之

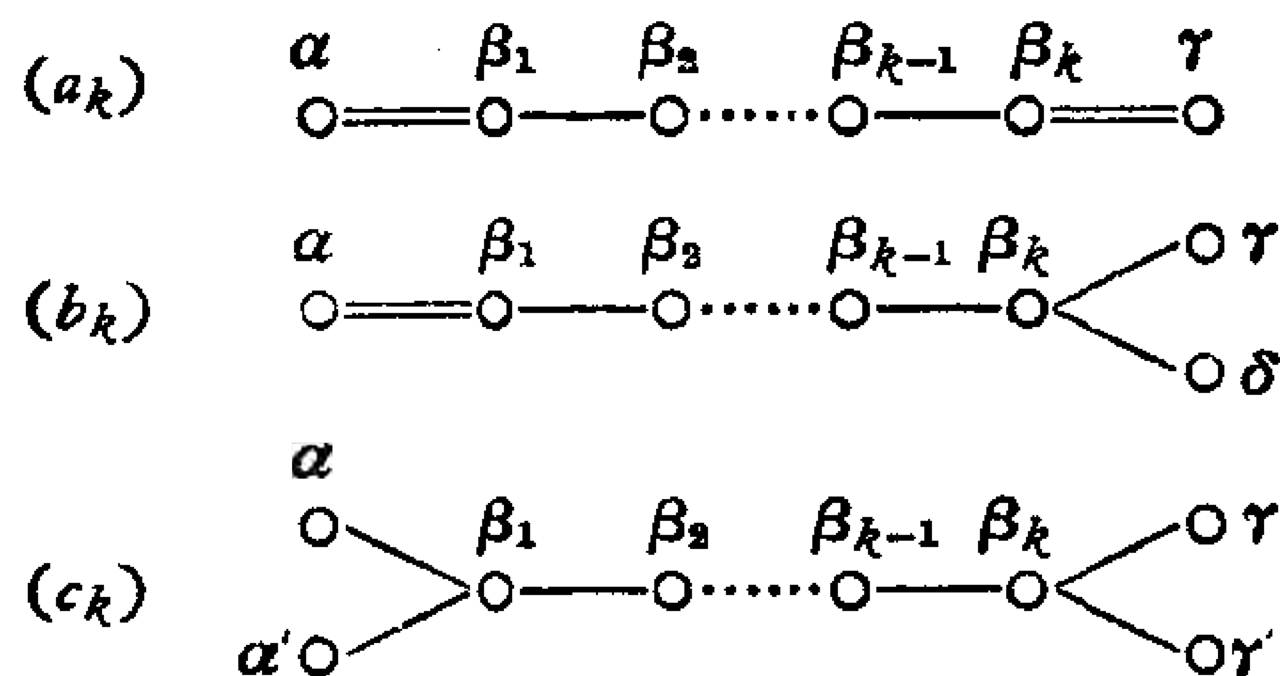
$$
(\beta, \alpha) = \left(\beta, \sum_{1}^{k} \alpha_i\right) = (\beta, \alpha_l).
$$

又如 γ 在 Π 中不与 C 相連，則

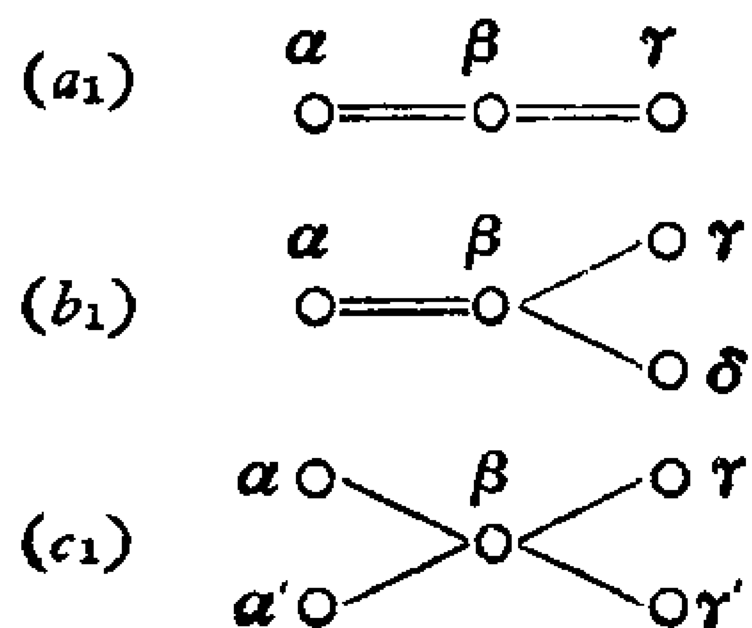
$$
(\gamma, \alpha) = \left(\gamma, \sum_{1}^{k} \alpha_i\right) = 0.
$$

因此，Π' 是个 π 系，而 Π' 的角图可由 Π 的图将鏈 C 縮为一点 α，并将每个与某一个 α_i 在 π 中用 t 重綫段相連的点 $\beta \in \Pi \setminus C$ 用 t 重綫段連到 α 而得.

推論. 以下这些图都不能是单 π 系的角图的子图：

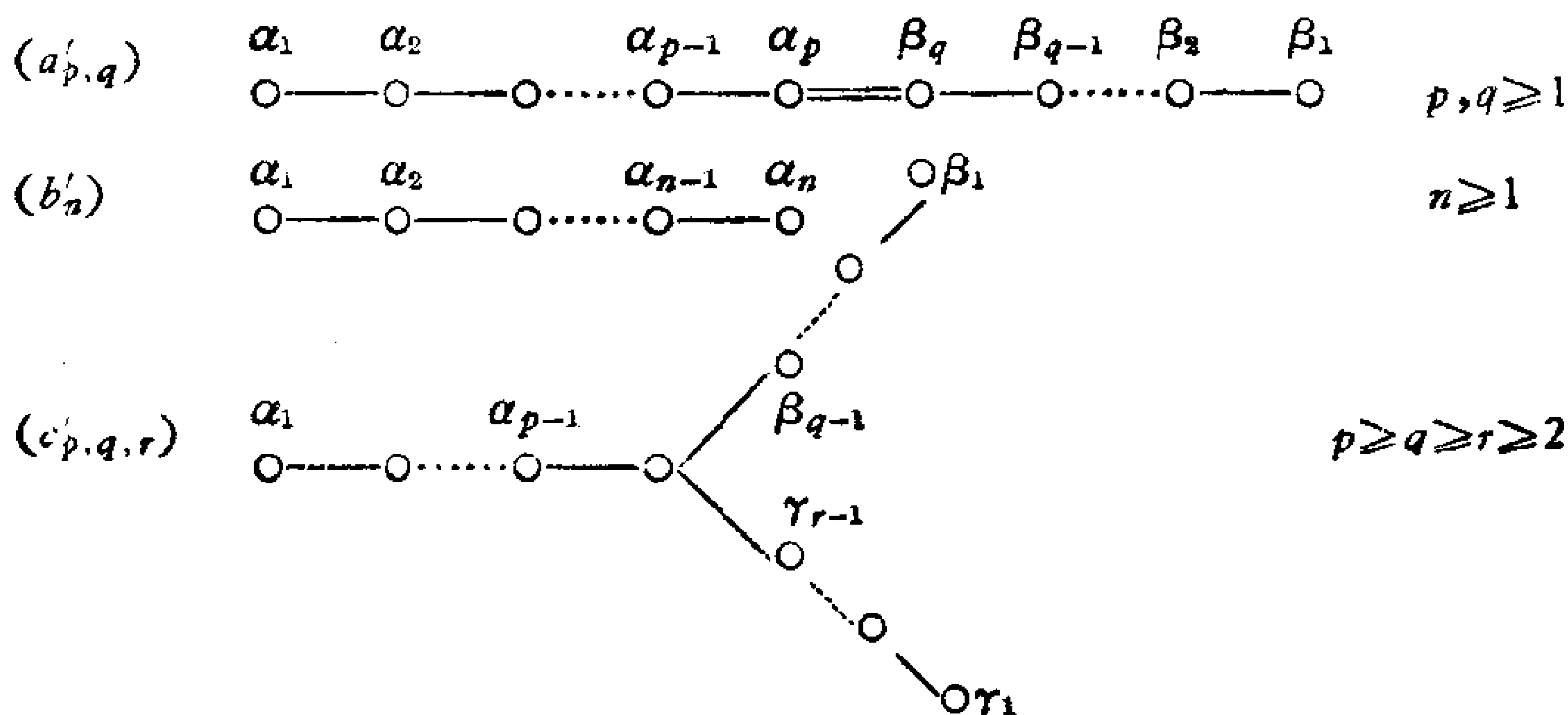


証. 实际上，如 (a_k)，(b_k)，(c_k) 是单 π 系的角图的子图，則根据引理 5，



也将是单 π 系的角图的子图，而这与引理 4 相抵触.

引理 6. 单 π 系 Π 的角图只能是以下几种类型的：



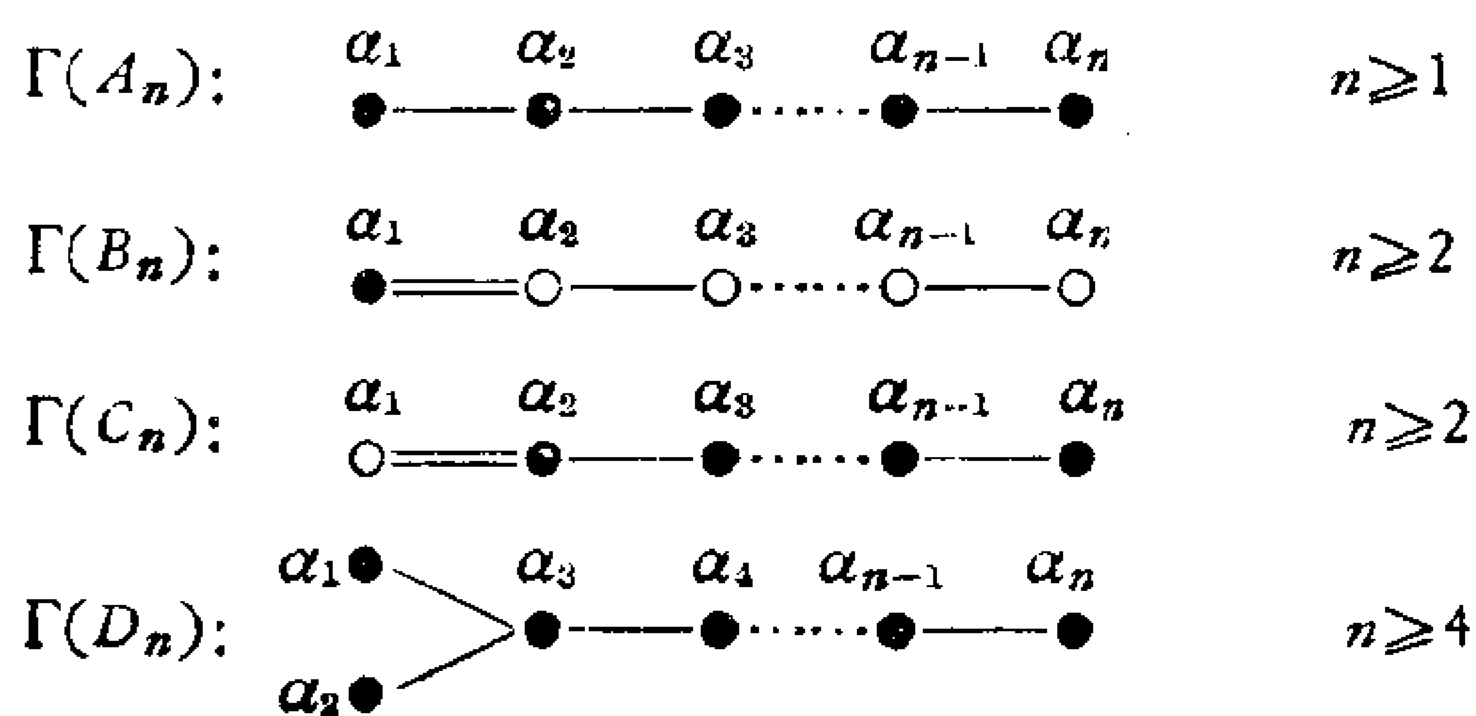
证. 設 Π 的角图中含一个二重綫段，即它包有一个子图 ○══○. 将这个子图扩充成一个极大鏈 C. 根据引理 5 的推論，C 只能包含一个二重綫段，因此 C 是 $(a'_{p,q})$ 类型的图. 如 $C \neq \Pi$，就有 $\gamma \in \Pi$，$\gamma \bar{\in} C$，而 γ 与 C 中一个点相連. 根据 C 的极大性，γ 不能与 α_1 或 β_1 相連. 根据引理 5 的推論，γ 也不能与 $\alpha_2, \cdots, \alpha_p$ 或 $\beta_2, \cdots, \beta_q$ 中之一相連，这是个矛盾. 因此 $\Pi = C$，即 Π 的角图是 $(a'_{p,q})$ 型的.

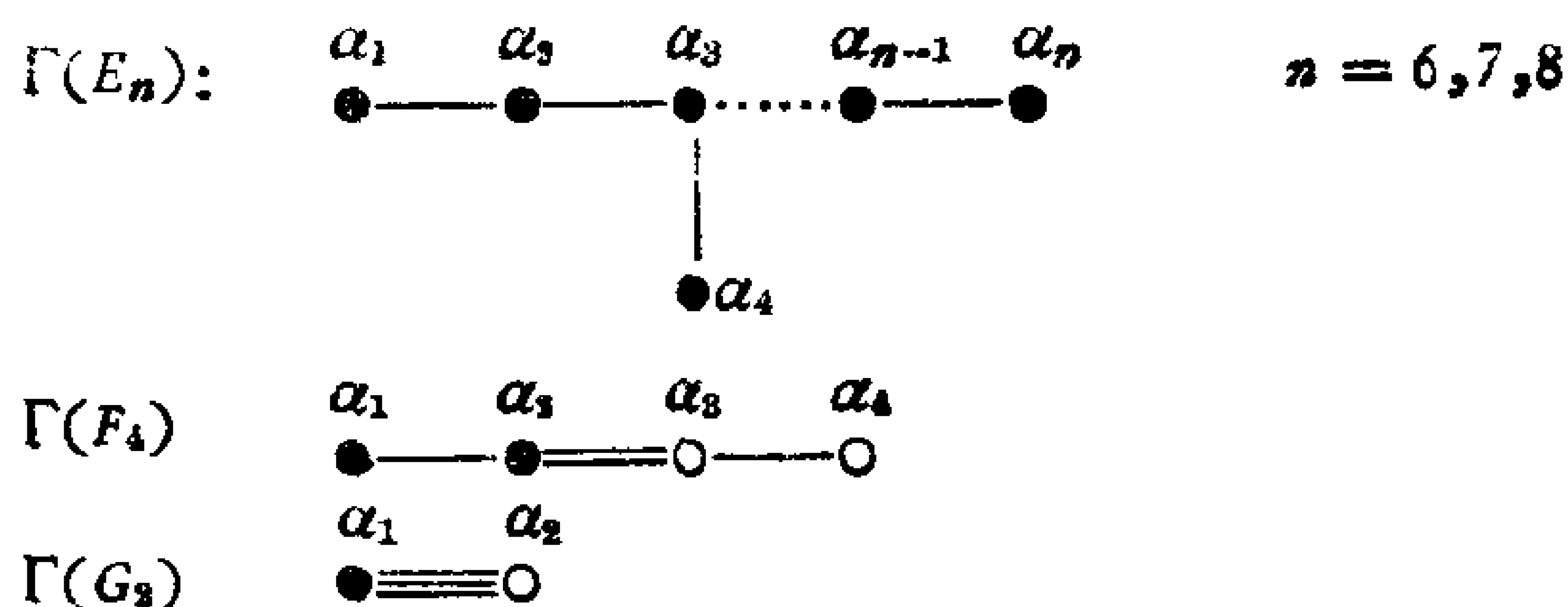
再設 Π 的角图中只有单重綫段，仍在其中选一个极大鏈 C. 如 $\Pi = C$，则 Π 的角图就是 (b'_n) 型的. 否则，再依引理 5 之推論，可知 Π 的角图是 $(c'_{p,q,r})$ 型的.

引理 7. 单 Π 系的图中只能有两种长度的向量.

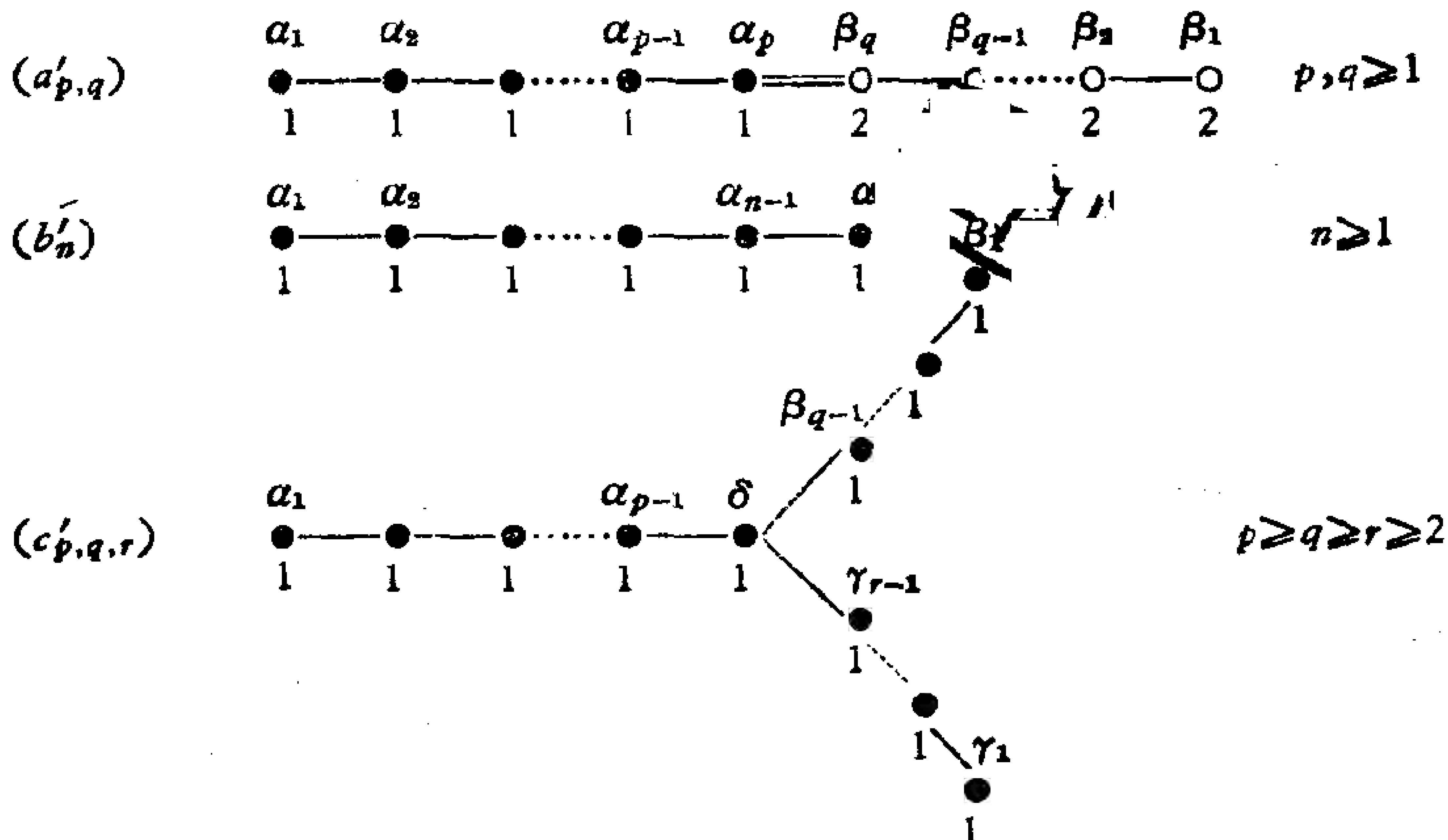
这是引理 2 和引理 6 的直接推論.

定理 1. 单 π 系的 Dynkin 图只能是以下几种类型的：





証．据引理 2，含三重綫段的单 π 系的 Dynkin 图只能是 $\Gamma(G_2)$．以下考虑不含三重綫段的单 π 系的 Dynkin 图．不失普遍性，可設单 π 系 Π 中較短的向量的长度为 1，于是根据引理 6，单 π 系的图只可能是



如果 $C=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 是由同样长度 $\sqrt{(\alpha_i,\alpha_i)}=a(i=1,\cdots,n)$ 的向量組成的鏈，命 $\alpha=\sum_{k=1}^{n}k\alpha_k$，則

$$(\alpha,\alpha)=\sum_{1}^{n}k^2(\alpha_k,\alpha_k)+2\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)(\alpha_k,\alpha_{k+1})$$

$$=\sum_{1}^{n}k^2a-\sum_{k=1}^{n-1}k(k+1)a=n^2a-\sum_{1}^{n-1}ka$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}a.$$

我們先証明，如单 π 系的图是 $(a'_{p,q})$，則 $p=1$ 而 q 任意或 $q=1$ 而 p 任意，或 $p=q=2$. 实际上，令 $\alpha=\sum_{k=1}^{p}k\alpha_k$, $\beta=\sum_{j=1}^{q}j\beta_j$, 則 $(\alpha,\alpha)=\frac{p(p+1)}{2}$, $(\beta,\beta)=q(q+1)$, 而

$$(\alpha,\beta)=pq(\alpha_p,\beta_q)=-pq.$$

因 $\alpha_1,\cdots,\alpha_p,\beta_1,\cdots,\beta_q$ 綫性无关，故 α, β 不共綫. 于是由 Schwartz 不等式 $(\alpha,\beta)^2<(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)$ 得

$$p^2q^2<\frac{1}{2}pq(p+1)(q+1).$$

卽

$$(p-1)(q-1)<2$$

由此卽得 $p=1$ 而 q 任意，或 $q=1$ 而 p 任意或 $p=q=2$. 这样得到的 Dynkin 图分别是 $\Gamma(B_{q+1})$, $\Gamma(C_{p+1})$ 和 $\Gamma(F_4)$.

(b'_n)卽是 $\Gamma(A_n)$.

最后来研究 $(c'_{p,q,r})$. 令 $\alpha=\sum_{i=1}^{p-1}i\alpha_i$, $\beta=\sum_{j=1}^{q-1}j\beta_j$, $\gamma=\sum_{k=1}^{r-1}k\gamma_k$ 我們有

$$(\alpha,\alpha)=\frac{1}{2}p(p-1),\quad (\beta,\beta)=\frac{1}{2}q(q-1),$$

$$(\gamma,\gamma)=\frac{1}{2}r(r-1),\quad (\delta,\delta)=1.$$

$$(\alpha,\delta)=-\frac{1}{2}(p-1),\quad (\beta,\delta)=-\frac{1}{2}(q-1),$$

$$(\gamma,\delta)=-\frac{1}{2}(r-1).$$

因此

$$\cos^2\langle\alpha,\delta\rangle=\frac{1}{2}(1-p^{-1}),\quad \cos^2\langle\beta,\delta\rangle=\frac{1}{2}(1-q^{-1}),$$

$$\cos^2\langle\gamma,\delta\rangle=\frac{1}{2}(1-r^{-1}).$$

因 α, β, γ 两两正交,根据引理 4 的証明中的同样道理,

$$\cos^2\langle\alpha, \delta\rangle + \cos^2\langle\beta, \delta\rangle + \cos^2\langle\gamma, \delta\rangle < 1$$

(δ 与 α, β, γ 綫性无关),即

$$\frac{1}{2}(1 - p^{-1} + 1 - q^{-1} + 1 - r^{-1}) < 1,$$

也即

$$p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} > 1.$$

因 $p \geqslant q \geqslant r$, 故 $p^{-1} \leqslant q^{-1} \leqslant r^{-1}$. 于是 $3r^{-1} > 1$. 因 $r \geqslant 2$, 故 $r = 2$. 于是 $p^{-1} + q^{-1} > \frac{1}{2}$, $2q^{-1} > \frac{1}{2}$, 因之 $q < 4$. 这样就有两个可能: $q = 2$ 和 $q = 3$. 如 $q = 2$, 则 $p^{-1} > 0$ 及 $p \geqslant 2$, 因之 p 是任意 $\geqslant 2$ 的整数; 这时 Dynkin 图是 $\Gamma(D_{p+2})$. 如 $q = 3$, 则 $p^{-1} > \frac{1}{6}$ 及 $p \geqslant 3$, 这就是説 $3 \leqslant p \leqslant 5$, 这时 Dynkin 图是 $\Gamma(E_{p+3})$.

定理 2. 对于定理 1 中列举的那些 Dynkin 图, 确有单 π 系存在,以它們作为 Dynkin 图.

証. 以 R^{n+1} 表 $n + 1$ 維欧氏空間. $e_1, \cdots, e_{n+1}$ 是它的一組标准正交基.

令 $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 我們有

$$(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 2, & |i-j| = 0 \\ -1, & |i-j| = 1 \\ 0, & |i-j| \geqslant 2 \end{cases} \quad i, j = 1, \cdots, n.$$

于是 $\Pi(A_n) = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 是个单 π 系,其 Dynkin 图为 $\Gamma(A_n)$.

在 R^n 中考察向量組 $\alpha_i (1 \leqslant i \leqslant n-1)$ 和 e_n, 我們有

$$(\alpha_i, e_n) = \begin{cases} -1, & i = n-1 \\ 0, & i < n-1 \end{cases}$$

$$(e_n, e_n) = 1.$$

于是 $\Pi(B_n) = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, e_n\}$ 是个单 π 系, 其 Dynkin 图为 $\Gamma(B_n)$.

在 R^n 中 $\Pi(C_n)=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, 2e_n\}$ 是个单 π 系,其 Dynkin 图为 $\Gamma(C_n)$。

在 R^n 中 $\Pi(D_n)=\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, e_{n-1}+e_n\}$ 也是个单 π 系,其 Dynkin 图为 $\Gamma(D_n)$. 注意,

$$(e_{n-1}+e_n, e_{n-1}+e_n)=2,$$

$$(\alpha_i, e_{n-1}+e_n)=\begin{cases}0, & i \neq n-2,\\ -1, & i=n-2.\end{cases}$$

剩下来还要研究五个例外情形,如令 $e^{(n)}=\sum_{k=1}^{n} e_k$, 那么对于 $\Gamma(G_2)$ 可在 R^3 中取

$$\Pi(G_2)=\{e_1-e_2, 3e_2-e^{(3)}\}.$$

对于 $\Gamma(F_4)$ 可在 R^4 中取

$$\Pi(F_4)=\{e_1-e_2, e_2-e_3, e_3, \frac{1}{2}(e_4-e_1-e_2-e_3)\},$$

对于 $\Gamma(E_6)$ 可在 R^7 中取

$$\Pi(E_6)=\{e_1-e_2, e_2-e_3, e_3-e_4, e_4-e_5, e_5-e_6,$$
$$-e_1-e_2-e_3+\frac{1}{2}e^{(6)}+\frac{\sqrt{2}}{2}e_7\}.$$

对于 $\Gamma(E_7)$ 可在 R^8 中取

$$\Pi(E_7)=\{e_1-e_2, e_2-e_3, e_3-e_4, e_4-e_5, e_5-e_6,$$
$$e_6-e_7, \frac{1}{2}e^{(8)}-e_1-e_2-e_3-e_4\}.$$

对于 $\Gamma(E_8)$ 可在 R^8 中取

$$\Pi(E_8)=\{e_1-e_2, e_2-e_3, e_3-e_4, e_4-e_5,$$
$$e_5-e_6, e_6-e_7, e_6+e_7, e_8-\frac{1}{2}e^{(8)}\}.$$

这就証明了定理 2.

由定理 1 和定理 2 就解决了单 π 系的分类問題,卽决定了一切两两不相似的单 π 系. $\Pi(A_n)$, $\Pi(B_n)$, $\Pi(C_n)$, $\Pi(D_n)$ 分别与典型代数 A_n, B_n, C_n, D_n 的基础根系相似. $\Pi(G_2)$, $\Pi(F_4)$,

$\Pi(E_n)$ $(n=6,7,8)$ 称为例外单π系. 在定理1和定理2的基础上容易推出

定理 3. 两两不相似的单σ系被典型代数$A_n(n\geqslant 1)$, $B_n(n\geqslant 2)$, $C_n(n\geqslant 3)$, $D_n(n\geqslant 4)$ 的根系和另外五个例外单σ系 $\Sigma(G_2)$, $\Sigma(F_4)$, $\Sigma(E_n)$ $(n=6,7,8)$ 所穷尽, 而它們的基础向量系分别是 $\Pi(G_2)$, $\Pi(F_4)$, $\Pi(E_n)$ $(n=6,7,8)$.

証. 以 $e_1, e_2, \cdots, e_8$ 为 R^8 中的一組标准正交基. 可以直接驗証

$$\Sigma(G_2)=\{e_i-e_j;\ \pm e^{(3)}-3e_i,\ i,j=1,2,3\},$$

$$\Sigma(F_4)=\{\pm e_i;\ \pm e_i\pm e_j;$$
$$\frac{1}{2}(\pm e_1\pm e_2\pm e_3\pm e_4);\ i,j=1,2,3,4\},$$

$$\Sigma(E_6)=\{e_i-e_j;\ \pm\sqrt{2}\,e_7;$$
$$\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e_7+\frac{1}{2}e^{(6)}-e_i-e_j-e_k\right);$$
$$i,j,k=1,\cdots,6\}.$$

$$\Sigma(E_7)=\{e_i-e_j;\ \left(\frac{1}{2}e^{(3)}-e_i-e_j-e_k-e_m\right);$$
$$i,j,k,m=1,\cdots,8\},$$

$$\Sigma(E_8)=\{\pm e_i\pm e_j,\ \pm\left(\frac{1}{2}e^{(8)}-e_i\right);$$
$$\pm\left(\frac{1}{2}e^{(8)}-e_i-e_j-e_k\right);\ i,j,k=1,\cdots,8\},$$

其中在同一式中出现的 i, j, k, m 两两不同, 是σ系而且分别以 $\Pi(G_2)$, $\Pi(F_4)$, $\Pi(E_6)$, $\Pi(E_7)$, $\Pi(E_8)$ 为基础向量組. 但以后我們将証明, 有单代数 G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 存在, 它們的基础向量系分别与 $\Pi(G_2)$, $\Pi(F_4)$, $\Pi(E_6)$, $\Pi(E_7)$, $\Pi(E_8)$ 相似, 那么它們的根系就是五个例外单σ系.

§3. 李代数 G_2

在李代数 B_3 中，我們知道

$$\mathfrak{h} = \{H_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} | \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in C\}$$

是它的一个 Cartan 子代数. 令

$$\mathfrak{h}' = \{H_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3} \Big| \sum_1^3 \lambda_i = 0\},$$

則 $\mathfrak{h}'$ 是 $\mathfrak{h}$ 的一个子代数. 再令

$$G_{\lambda_i} = \sqrt{2}\, E_{\lambda_i} + E_{-\lambda_j-\lambda_k},$$
$$G_{-\lambda_i} = \sqrt{2}\, E_{-\lambda_i} + E_{\lambda_j+\lambda_k},$$

其中 i, j, k 为 1, 2, 3 的一个偶排列，并改記

$$G_{\lambda_i-\lambda_k} = E_{\lambda_i-\lambda_k}, \quad i \neq k.$$

对任意 $H_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} \in \mathfrak{h}'$，我們有

$$[H_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}, G_\alpha] = \alpha G_\alpha,$$

对 $\alpha = \pm\lambda_i$ $(i = 1, 2, 3)$ 以及 $\alpha = \lambda_i - \lambda_k$ $(i, k = 1, 2, 3, i \neq k)$. 如令

$$H_1 = H_{1,0,0}, \quad H_2 = H_{0,1,0}, \quad H_3 = H_{0,0,1},$$

我們还有

$$[G_{\lambda_i}, G_{-\lambda_i}] = 3H_i - (H_1 + H_2 + H_3),$$
$$[G_{\lambda_i-\lambda_k}, G_{\lambda_k-\lambda_i}] = H_i - H_k,$$
$$\left.\begin{aligned}[G_{\lambda_i}, G_{\lambda_j}] &= -2G_{-\lambda_k}\\ [G_{-\lambda_i}, G_{-\lambda_j}] &= 2G_{\lambda_k}\end{aligned}\right\}\ (i, j, k)\text{为偶排列},$$
$$[G_{\lambda_i}, G_{-\lambda_j}] = 3G_{\lambda_i-\lambda_j} \quad (i \neq j),$$
$$[G_{\lambda_i-\lambda_j}, G_{\lambda_k}] = \delta_{jk} G_{\lambda_i},$$
$$[G_{\lambda_i-\lambda_j}, G_{-\lambda_k}] = -\delta_{ik} G_{-\lambda_j},$$
$$[G_{\lambda_i-\lambda_j}, G_{\lambda_k-\lambda_l}] = \delta_{jk} G_{\lambda_i-\lambda_l} - \delta_{il} G_{\lambda_k-\lambda_j}$$
$$(i \neq l \text{ 而且 } j \neq k).$$

因此，$\mathfrak{h}'$ 和 $G_{\pm\lambda_i}$ $(i = 1, 2, 3)$，$G_{\lambda_i-\lambda_k}$ $(i, k = 1, 2, 3, i \neq k)$ 生成一个 14 維的李代数. 将此李代数記作 G_2. 显然 $\mathfrak{h}'$ 是 G_2 的一

个 Cartan 子代数.

我們来証明 G_2 是半单的.为此,将 G_2 看作是作用在七維列向量空間 V_7 上的綫性李代数,而

$$v_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad v_i=\begin{pmatrix}0\\e_i\\0\end{pmatrix},\quad v_{i'}=\begin{pmatrix}0\\0\\e_i\end{pmatrix},\quad (i=1,2,3)$$

其中 e_i 表第 i 个分量为 1 而其余分量为 0 的三維列向量,組成 V_7 的一組基. 我們先証明 V_7 在 G_2 的作用下不可約. 实际上,設 V' 是一个非 0 不可約的不变子空間,則 V' 在 $\mathfrak{h}'$ 的作用下不变. 注意到

$$H_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}v_0=0,\ H_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}v_i=\lambda_iv_i,\ H_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}v_{i'}=-\lambda_iv_{i'},$$

卽知 V' 一定包有基向量 $v_0, v_1, v_2, v_3, v_{1'}, v_{2'}, v_{3'}$ 之一. 于是由

$$G_{\lambda_i}v_0=-\sqrt{2}\,v_i,\ G_{\lambda_i}v_j=\varepsilon v_{k'},\ G_{\lambda_i-\lambda_j}v_{i'}=-v_{j'},$$

$$G_{-\lambda_i}v_0=\sqrt{2}\,v_{i'},\ G_{-\lambda_i}v_{j'}=-\varepsilon v_k, G_{\lambda_i-\lambda_j}v_j=v_i,$$

$$G_{\lambda_i}v_{i'}=\sqrt{2}\,v_0,$$

(在第二列的等式中 $\varepsilon=-1$ 或 1,根据排列 (ijk) 的奇偶性而定),卽推知$V'=V_7$. 这証明了 G_2 是不可約的. 易見 G_2 的中心为 0, 因此,根据第二章定理 2 之系理 3 知, G_2 是半单的.

我們已經見到, G_2 对于 $\mathfrak{h}'$ 的根是 $\pm\lambda_i(i=1,2,3)$ 和 $\lambda_i-\lambda_k$ $(i,k=1,2,3,i\neq k)$. 我們証明 $\lambda_1-\lambda_2$ 和 λ_2 組成 G_2 的一組基础根系. 由于 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$, G_2 的根可写作

$$\pm\lambda_1,\ \pm\lambda_2, \pm(\lambda_1+\lambda_2),\ \pm(\lambda_1-\lambda_2),\ \pm(2\lambda_1+\lambda_2),\ \pm(\lambda_1+2\lambda_2);$$

又因 $\lambda_1=(\lambda_1-\lambda_2)+\lambda_2$, 这就証明了 $\lambda_1-\lambda_2$ 和 λ_2 組成 G_2 的一組基础根系.又因 $(\lambda_1-\lambda_2)+k\lambda_2(0\leqslant k\leqslant 3)$ 都是根而当 $k>3$ 时 $(\lambda_1-\lambda_2)+k\lambda_3$ 不再是根,故 $\dfrac{2(\lambda_1-\lambda_2,\lambda_2)}{(\lambda_2,\lambda_2)}=-3$. 这証明了 G_2 的 Dynkin 图是

●≡≡≡○

λ_2 $\lambda_1-\lambda_2$

因此 G_2 是以图 $\Gamma(G_2)$ 为 Dynkin 图的单代数.

§4. 单李代数的分类

定理 4. (W. Killing-E. Cartan). 全部单李代数由四系典型李代数 $A_n(n \geqslant 1)$, $B_n(n \geqslant 1)$, $C_n(n \geqslant 1)$ 和 $D_n(n \geqslant 3)$ 以及五个例外李代数 G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 所取尽, 它們之間只有下列同构关系:

$$A_1 \approx B_1 \approx C_1, \quad B_2 \approx C_2, \quad A_3 \approx D_3.$$

証. 根据第六章定理 8, 我們知道两个单李代数同构当且仅当它們的基础根系相似, 因而合同. 又根据第六章定理 4 的系理, 我們知道一个半单李代数是单的当且仅当它的基础根系是单 π 系. 在 §2 中我們已經定出了一切两两不相似的单 π 系, 它們的 Dynkin 图是定理 1 中的 $\Gamma(A_n)$ $(n \geqslant 1)$, $\Gamma(B_n)$ $(n \geqslant 2)$, $\Gamma(C_n)$ $(n \geqslant 3)$, $\Gamma(D_n)$ $(n \geqslant 4)$, $\Gamma(E_n)$ $(n=6, 7, 8)$, $\Gamma(F_4)$ 和 $\Gamma(G_2)$. 因此要証明定理 4, 只要对这些 Dynkin 图中的每一个来証明有一单李代数存在, 而这个单李代数以所賦予的 Dynkin 图为其 Dynkin 图.

根据 §1 的討論, 我們知道在第一章 §3 中所定义的典型李代数 $A_n(n \geqslant 1)$, $B_n(n \geqslant 1)$, $C_n(n \geqslant 1)$ 和 $D_n(n \geqslant 3)$ 分别以 $\Gamma(A_n)$, $\Gamma(B_n)$, $\Gamma(C_n)$ 和 $\Gamma(D_n)$ 为其 Dynkin 图, 而且 $A_1 \approx B_1 \approx C_1$, $B_2 \approx C_2$, $A_3 \approx D_3$.

又根据本章 §3 的討論, 那里定义的李代数 G_2 是单的而且以 $\Gamma(G_2)$ 为其 Dynkin 图.

因此剩下的問題是要証明确有单李代数 F_4, E_6, E_7, E_8 存在, 它們分别以本章 §2 所定的单 π 系的 Dynkin 图 $\Gamma(F_4)$, $\Gamma(E_6)$, $\Gamma(E_7)$, $\Gamma(E_8)$ 为 Dynkin 图. 关于 F_4 和 E_8 的存在性, 将在本书第十二章中給出. 如果假定 E_8 存在, 則因 $\Pi(E_6)$, $\Pi(E_7)$ 是 $\Pi(E_8)$ 的子 π 系, 故 E_6, E_7 的存在将是下述定理的推論.

定理 5. 設 $\mathfrak{g}$ 是个半单李代数, $\mathfrak{h}$ 是它的一个 Cartan 子代数,

而 Σ 是它的根系. 設 Σ' 是 Σ 的一个子集，有下述性質：(i) 如 $\alpha,\beta\in\Sigma'$ 而 $\alpha+\beta\in\Sigma$，則 $\alpha+\beta\in\Sigma'$；(ii) 如 $\alpha\in\Sigma'$，則 $-\alpha\in\Sigma'$. 那么一切 $H_\alpha, E_\alpha, (\alpha\in\Sigma')$ 张成 $\mathfrak{g}$ 的一个半单子代数 $\mathfrak{g}'$，它以一切 $H_\alpha(\alpha\in\Sigma')$ 张成的 $\mathfrak{h}$ 的子代数 $\mathfrak{h}'$ 为其 Cartan 子代数，而 $\mathfrak{g}'$ 对 $\mathfrak{h}'$ 的根系与 Σ' 相似.

証. 从 Σ' 具有性質(i)即可推出 $\mathfrak{g}'$ 是一个子代数，而且 $\mathfrak{g}'$ 的結构公式为

$$
\begin{aligned}
&[H, H'] = 0, && H, H'\in\mathfrak{h}'\\
&[H, E_\alpha] = \alpha(H)E_\alpha, && H\in\mathfrak{h}', \alpha\in\Sigma'\\
&[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha, && \alpha\in\Sigma'\\
&[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}, && \alpha, \beta\in\Sigma'.
\end{aligned}
$$

我們欲証 $\mathfrak{g}'$ 半单，只要証明 $\mathfrak{g}'$ 的 Killing 型非退化. 設 $X, Y\in\mathfrak{g}'$，以 $(X, Y)'$ 表 $\mathfrak{g}'$ 的 Killing 型，設有 $Z\in\mathfrak{g}'$ 使得对一切 $X\in\mathfrak{g}'$，$(Z, X)'=0$. 选 $\mathfrak{h}'$ 的一組基 $H_{\gamma_1}, H_{\gamma_2}, \cdots, H_{\gamma_{n'}}$，其中 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{n'}$ 为 Σ' 的一个极大綫性无关子集，于是它們和所有的 $E_\alpha(\alpha\in\Sigma')$ 一起就組成 $\mathfrak{g}'$ 的一組基. 可以写

$$Z = \sum_{i=1}^{n'} a_i H_{\gamma_i} + \sum_{\alpha\in\Sigma'} b_\alpha E_\alpha,$$

其中 a_i, b_α 皆复数. 对任意 $\beta\in\Sigma'$，我們有

$$(H, E_{-\beta})' = \mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'}H\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'}E_{-\beta} = 0, \text{对} H\in\mathfrak{h}'$$

以及

$$(E_\alpha, E_{-\beta})' = \mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'}E_\alpha\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'}E_{-\beta} = 0, \quad \text{对} \alpha\in\Sigma' \text{而} \alpha\neq\beta.$$

于是

$$(Z, E_{-\beta})' = b_\beta(E_\beta, E_{-\beta})'. \tag{1}$$

但是

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{ad}\,E_\beta\,\mathrm{ad}\,E_{-\beta}H = \beta(H)H_\beta,\\
&\mathrm{ad}\,E_\beta\,\mathrm{ad}\,E_{-\beta}E_\beta = \beta(H_\beta)E_\beta,\\
&\mathrm{ad}\,E_\beta\,\mathrm{ad}\,E_{-\beta}E_\gamma = N_{-\beta,\gamma}N_{\beta,-\beta+\gamma}E_\gamma, \quad \text{若} \gamma\neq\beta.
\end{aligned}
$$

根据第五章引理 3 有

$$N_{\beta,-\beta+\gamma} = N_{-\gamma,\beta} = -N_{\beta,-\gamma}$$

以及

$$N_{-\beta,\gamma}N_{\beta,-\beta+\gamma} = -N_{-\beta,\gamma}N_{\beta,-\gamma} = \frac{q}{2}(p+1)(\beta,\beta),$$

其中 p, q 为最大非负整数使 $\gamma - k\beta\,(-p \leqslant k \leqslant q)$ 都是根，那么，当 $\gamma \neq \beta$ 时，

$$\mathrm{ad}\, E_\beta\, \mathrm{ad}\, E_{-\beta} E_\gamma = \frac{1}{2} q(p+1)(\beta,\beta) E_\gamma.$$

因此

$$(E_\beta, E_{-\beta})' \geqslant 2(\beta,\beta) > 0.$$

于是由(1)式推出 $b_\beta=0$，而 β 为 Σ' 中任一根．那么 $Z=\sum_{i=1}^{n'} a_i H_{\gamma_i} \in \mathfrak{h}'$，而对任意 $Y = \Sigma a_i' H_{\gamma_i} \in \mathfrak{h}$ 有

$$(Z, Y)' = \sum_{i,j=1}^{n'} a_i a_j' (H_{\gamma_i}, H_{\gamma_j})' = 0.$$

以 $\mathfrak{h}_0'$ 表一切 $H_\alpha(\alpha \in \Sigma')$ 的实系数綫性組合所組成之空間．設 $H = \sum_{i=1}^{n'} b_i H_{\gamma_i}$，其中 b_i 为实数，則

$$(H, H)' = \sum_{\varphi \in \Sigma'} \varphi(H)^2,$$

而

$$\varphi(H) = (H, H_\varphi) = \sum_{i=1}^{n'} b_i(\gamma_i, \varphi).$$

因 (γ_i, φ) 是有理数，故 $(H, H)' \geqslant 0$．又如 $(H,H) = 0$，則对一切 $\varphi \in \Sigma', \varphi(H) = 0$；特别

$$\gamma_j(H) = \sum_{i=1}^{n'} b_i(\gamma_i, \gamma_j) = 0,\quad j = 1, 2, \cdots, n'.$$

但 $\gamma_1, \cdots, \gamma_{n'}$ 綫性无关，故 $\det((\gamma_i, \gamma_j))_{1\leqslant i,j\leqslant n'} \neq 0$．因此 $b_i=0$ $(1 \leqslant i \leqslant n')$，即 $H = 0$．这証明了 $\mathfrak{g}'$ 的 Killing 型在 $\mathfrak{h}_0'$ 上的誘导是定正的，亦即

$$((H_{\gamma_i}, H_{\gamma_j})')_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

是一定正矩陣，因而非退化．这个矩陣也是 $\mathfrak{g}'$ 的 Killing 型，在 $\mathfrak{h}'$ 上的誘导相对于 $\mathfrak{h}'$ 的基 $H_{\gamma_1}, \cdots, H_{\gamma_{n'}}$ 的系数矩陣，因此 $\mathfrak{g}'$ 的 Killing 型在 $\mathfrak{h}'$ 上的诱导非退化．于是由 $(Z, Y)'=0$（对一切 $Y\in\mathfrak{h}'$）导出 $Z=0$．这証明了 $\mathfrak{g}'$ 的 Killing 型非退化，因而 $\mathfrak{g}'$ 半单．至于 $\mathfrak{h}'$ 是 $\mathfrak{g}'$ 的 Cartan 子代数，以及 $\mathfrak{g}'$ 相对于 $\mathfrak{h}'$ 的根系与 Σ' 相似这两点，是很显然的．

第八章　半单李代数的自同构[1]

§1. 李代数的自同构羣和导子代数

設 $\mathfrak{g}$ 是复数域 C 上的一个李代数. $\mathfrak{g}$ 的一个可逆綫性变換 A 如具有性質:

$$A[X, Y] = [AX, AY]$$

(对一切 $X, Y \in \mathfrak{g}$), 就称为 $\mathfrak{g}$ 的一个自同构. $\mathfrak{g}$ 的自同构的全体組成一羣,称为 $\mathfrak{g}$ 的自同构羣, 記作 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$. 自然, $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}$ 上一切可逆綫性变換所組成的复解析羣 $GL(r, C) = GL(\mathfrak{g})$ 的子羣, r 为 $\mathfrak{g}$ 的維数. 因 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 是 $GL(r, C)$的閉子羣, 故 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 本身也是一个复李羣.

又, $\mathfrak{g}$ 的一个綫性变換 D 称为 $\mathfrak{g}$ 的一个导子, 如果 D 具有性質:

$$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY] \quad 对一切\ X, Y \in \mathfrak{g}.$$

$\mathfrak{g}$ 的导子的全体組成 $\mathfrak{g}$ 上全体綫性变換所組成的李代数 $\mathfrak{gl}(r, C) = \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ 的一个子代数,称为 $\mathfrak{g}$ 的导子代数,記作 $\mathrm{aut}\,\mathfrak{g}$.

定理 1. $\mathrm{aut}\,\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 的李代数.

証. $\mathfrak{gl}(r, C)$ 是$GL(r, C)$的李代数. $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 作为 $GL(r, C)$ 的閉子羣,可設它以 $\mathfrak{gl}(r, C)$ 的子代数 $\mathfrak{a}$ 作为它的李代数.

任取 $D \in \mathfrak{a}$. 于是,对于任意复数 t, $\exp tD \in \mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$, 卽 $\exp tD$ 是 $\mathfrak{g}$ 的自同构. 我們有

$$\exp tD[X, Y] = [(\exp tD)X, (\exp tD)Y],$$

对一切 $X, Y \in \mathfrak{g}$. 将 $\exp tD$ 写作

---

1) 閱讀本章,須具备李羣的基本知識. 見 C. Chevalley, Theory of Lie Groups Vol. I, Princeton University Press, 1946. 讀者也可略去本章而直接閱讀以后几章.

$$\exp tD = I + tD + t^2 D_t,$$

而 D_t 为一矩陣,当 $t \to 0$ 时, $D_t \to \frac{D^2}{2!}$. 于是

$$(I + tD + t^2 D_t)[X, Y] = [(I + tD + t^2 D_t)X, (I + tD + t^2 D_t)Y].$$

展开上式得

$$\begin{aligned}[X, Y] + tD[X, Y] + t^2 D_t[X, Y] = \\ = [X, Y] + [tDX, Y] + [X, tDY] + \\ + t^2[D_t X, Y + tDY + t^2 D_t Y] + \\ + t^2[DX, DY + tD_t Y] + t^2[X, D_t Y].\end{aligned}$$

将双方除以 t, 再令 $t \to 0$ 卽得

$$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY].$$

因此 D 是 $\mathfrak{g}$ 的导子. 这証明了 $\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{aut} \mathfrak{g}$.

現在設 $D \in \operatorname{aut} \mathfrak{g}$, 卽

$$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY].$$

用归納法可証

$$D^p[X, Y] = \sum_{k=0}^{p} \frac{p!}{k!(p-k)!} [D^k X, D^{p-k} Y],$$

于是

$$\exp tD[X, Y] = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} \sum_{k=0}^{p} \frac{p!}{k!(p-k)!} [D^k X, D^{p-k} Y] = [\exp tDX, \exp tDY],$$

因此 $\exp tD \in \operatorname{Aut} \mathfrak{g}$. 于是 $D \in \mathfrak{a}$, 这証明了 $\operatorname{aut} \mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{a}$.

至此定理 1 証毕.

作为定理 1 的推論立得: 单連通李羣的自同构羣与一李羣(卽它的李代数的自同构羣)同构, 此李羣的李代数是这个单連通李羣的李代数的导子代数.

仍設 $\mathfrak{g}$ 为李代数. 对任一 $X \in \mathfrak{g}$, 我們知道 $\operatorname{ad} X$ 是 $\mathfrak{g}$ 的內导子, $\mathfrak{g}$ 的內导子的全体构成一李代数称为 $\mathfrak{g}$ 的內导子代数, 記作

$\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$. 自然，$\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{aut}\,\mathfrak{g}$ 的子代数，因此 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 的单位元的連通分支所构成的解析羣的一个解析子羣的李代数. 这个解析子羣記作 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$，称为李代数 $\mathfrak{g}$ 的**內自同构羣**.

如果 $\mathfrak{g}$ 是解析羣 $\mathfrak{G}$ 的李代数，以 A 表 $\mathfrak{G}$ 的伴随表示：

$$\sigma \xrightarrow{A} d\alpha_\sigma \quad (\alpha_\sigma:\ t \to \sigma t \sigma^{-1}),$$

則 A 将 $\mathfrak{G}$ 映入 $GL(\mathfrak{g})$. 因 $d\alpha_\sigma$ 皆是 $\mathfrak{g}$ 之自同构，故 A 将 $\mathfrak{G}$ 映入 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$. 我們知道，对一切 $X \in \mathfrak{g}$:

$$X \xrightarrow{dA} \mathrm{ad}\,X,$$

即 dA 将 $\mathfrak{g}$ 映到 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ 之上. 这指明，$\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ 是解析羣 $\{d\alpha_\sigma \mid \sigma \in \mathfrak{G}\}$ 的李代数. 因 $\{d\alpha_\sigma \mid \sigma \in \mathfrak{G}\}$ 与 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 同为 $GL(\mathfrak{g})$ 的解析子羣而它們有相同的李代数，故

$$Ad\,\mathfrak{g} = \{d\alpha_\sigma \mid \sigma \in \mathfrak{G}\}.$$

又因 $\{d\alpha_\sigma \mid \sigma \in \mathfrak{G}\}$ 与 $\mathfrak{G}$ 的內自同构羣同构，这說明了为什么将 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的內自同构羣的道理.

一般說来，$\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 不一定是 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 的閉子羣. 但对于半单代数来說，这却是对的. 这基于

定理 2. 半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的导子都是內导子，即 $\mathrm{aut}\,\mathfrak{g} = \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$.

証. 設 D 是 $\mathfrak{g}$ 的一个导子. 定义一个新的李代数 $\mathfrak{g}_1$，它由一切 $(X, \lambda D)$ 組成，$X \in \mathfrak{g}$，λ 为复数. 定义

$$(X, \lambda D) + (Y, \mu D) = (X + Y, (\lambda + \mu)D),$$

$$[(X, \lambda D), (Y, \mu D)] = ([X, Y] + \lambda D(Y) - \mu D(X), 0),$$

显然 $\mathfrak{g}_1$ 成一向量空間，而且換位运算对两个变元来說都是綫性的. 要証 $\mathfrak{g}_1$ 成一李代数，还需証 Jacobi 恆等式成立. 我們有

$$\begin{aligned}
&[[(X, \lambda D), (Y, \mu D)], (Z, \nu D)] \\
&\quad = [([X, Y] + \lambda D(Y) - \mu D(X), 0), (Z, \nu D)] \\
&\quad = [[X, Y] + \lambda D(Y) - \mu D(X), Z] \\
&\qquad - \nu D([X, Y] + \lambda D(Y) - \mu D(X)) \\
&\quad = [[X, Y], Z] + \lambda[D(Y), Z] -
\end{aligned}$$

$$-\mu[D(X), Z] - \nu D[X, Y]$$
$$-\lambda\nu D^2(Y) + \nu\mu D^2(X).$$

由此容易看出 Jacobi 恆等式成立.

我們断言, $\mathfrak{g}_1$ 不是半单的. 設 $\mathfrak{g}_1$ 半单. 記 $\mathfrak{g}_0 = \{(X, 0) | X \in \mathfrak{g}\}$. 易見 $\mathfrak{g}_0$ 与 $\mathfrak{g}$ 同构, 因而是 $\mathfrak{g}_1$ 的一个半单理想. 因此 $\mathfrak{g}_1$ 有以下的分解:

$$\mathfrak{g}_1 = \{(X, 0) | X \in \mathfrak{g}\} \dotplus \mathfrak{a}.$$

比較維数, 知 $\mathfrak{a}$ 是一維的. 这与 $\mathfrak{g}_1$ 半单相抵触.

今設 $\mathfrak{r}$ 是 $\mathfrak{g}_1$ 的极大可解理想.

因 $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{r}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的可解理想, 故 $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{r} = (0)$. 因此

$$\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g} \dotplus \mathfrak{r} \quad (\text{理想直和}).$$

自然 $\mathfrak{r}$ 是一維的, $(0, D)$ 在此直分解中:

$$(0, D) = (A, 0) \dotplus T, \quad T \in \mathfrak{r}.$$

于是

$$[(0, D), (X, 0)] = [(A, 0), (X, 0)],$$

即

$$(DX, 0) = ([A, X], 0).$$

因此

$$DX = \mathrm{ad}\, AX.$$

这就証明了

$$D = \mathrm{ad}\, A.$$

系理 1. 半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的內自同构羣 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 是它的自同构羣 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 的单位元的連通分支, 因而是 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 的閉子羣.

系理 2. 单連通半单李羣 $\mathfrak{G}$ 的自同构羣是一李羣, 它的李代数与 $\mathfrak{G}$ 的李代数 $\mathfrak{g}$ 同构. 更进一步, $\mathfrak{G}$ 的自同构羣的单位元的連通分支即是它的內自同构羣.

前一断言由定理 1 的推論及 $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g} \approx \mathfrak{g}$ 推出. 后一断言由系理 1 推出.

設 $\mathfrak{g}$ 为半单李代数, $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}/\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的外自同构羣. 在下一节里我們研究这个羣的結构.

定理 3. 半单代数 $\mathfrak{g}$ 的自同构羣 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 和內自同构羣 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$的中心都仅由单位元构成.

証. 設 A 是 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 或 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 的一个中心元素. 对任意 $X\in\mathfrak{g}$ 及任意复数 t, $e^{t\,\mathrm{ad}\,X}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的內自同构. 于是

$$Ae^{t\,\mathrm{ad}\,X}=e^{t\,\mathrm{ad}\,X}A.$$

比較上式双方 t 的綫性項即得

$$A\,\mathrm{ad}\,X=\mathrm{ad}\,XA,$$

即对任意 $Y\in\mathfrak{g}$ 都有

$$(A\,\mathrm{ad}\,X)Y=(\mathrm{ad}\,XA)Y,$$

即

$$[AX,AY]=[X,AY].$$

因 A 为 $\mathfrak{g}$ 的自同构,故 $AX=X$; 这表明 A 是 $\mathfrak{g}$ 的恆同映射.

§2. 半单李代数的外自同构羣

設 $\mathfrak{g}$ 是半单李代数. 以 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 表示 $\mathfrak{g}$ 的自同构羣, 以 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 表示 $\mathfrak{g}$ 的內自同构羣. $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 是 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 的单位元的連通分支, 因而是正規子羣. 商羣 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}/\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的外自同构羣, 我們要在这一节里研究它.

設 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个固定的 Cartan 子代数. 以 $\mathfrak{A}$ 表示 $\mathfrak{g}$ 的所有将 $\mathfrak{h}$ 映到 $\mathfrak{h}$ 之上的自同构的集合, 它自然是 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 的一个子羣. 对任意 $A\in\mathfrak{A}$, 令

$$A\to A\,\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}. \tag{1}$$

这是一个将 $\mathfrak{A}$ 映入 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}/\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 的同态映射. 我們来証明它是映上的, 設 $B\in\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$, 則 $B^{-1}(\mathfrak{h})$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数. 根据第三章的定理6(Cartan 子代数的共軛性定理),有 $U\in\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 使 $U(\mathfrak{h})=B^{-1}(\mathfrak{h})$. 于是 $BU(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$, 即 $A=BU\in\mathfrak{A}$. 因此 $A\,\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}=B\,\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$, 即映射(1)是映上的. 以 $\mathfrak{A}_0$ 表同态(1)的核, 于是

$$\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_0\approx\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}/\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}.$$

因此我們可以研究 $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_0$, 以免直接研究 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}/\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$.

設 $A\in\mathfrak{A}$，于是 A 在 $\mathfrak{h}$ 上誘导出一个变换. 更进一步我們有

引理 1. 設 A 为 $\mathfrak{g}$ 的一个自同构而 $A(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$，那么 A 引起 $\mathfrak{h}_0$ 的一个正交变换，并且引起 $\mathfrak{g}$ 的根系的一个置換（我們假定利用 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型将根嵌入 $\mathfrak{h}$）.

証. 設 $\alpha\in\Sigma$，Σ 为 $\mathfrak{g}$ 的根系. 取 $E_\alpha\in\mathfrak{g}^\alpha$，則对任意 $H\in\mathfrak{h}$ 有

$$A[H, E_\alpha]=\alpha(H)AE_\alpha=[AH, AE_\alpha]. \tag{2}$$

所以 AE_α 也是根向量. 另一方面，如果用公式

$$\alpha^*(H)=(H, AH_\alpha),\quad H\in\mathfrak{h}$$

来定义一个 $\mathfrak{h}$ 上的綫性函数，那么 $AH_\alpha=H_{\alpha^*}$. 于是

$$\alpha(H)=(H, H_\alpha)=(AH, AH_\alpha)=(AH, H_{\alpha^*})=\alpha^*(AH),$$

所以从(2)式得 $[AH, AE_\alpha]=\alpha^*(AH)AE_\alpha$. 又因 $A\mathfrak{h}=\mathfrak{h}$，所以

$$[H, AE_\alpha]=\alpha^*(H)AE_\alpha,$$

即 AE_α 是相应于根 α^* 的根向量. 于是 $AH_\alpha=H_{\alpha^*}\in\mathfrak{h}_0$，因此 $A\mathfrak{h}_0=\mathfrak{h}_0$. 又因 Killing 型对 $\mathfrak{h}_0$ 的限制是 $\mathfrak{h}_0$ 的一个欧氏度量，而 $\mathfrak{g}$ 的自同构保持 Killing 型，所以 A 引起 $\mathfrak{h}_0$ 的一个正交变换. 又由 $AH_\alpha=H_{\alpha^*}$，或对偶地置 $A\alpha=\alpha^*$，即知 A 引起根系的一个置換. 这証明了引理 1.

这样，任一 $A\in\mathfrak{A}$ 都引出 $\mathfrak{h}_0$ 的一个正交变换并引起根的一个置換，記由 A 所引出的 $\mathfrak{h}_0$ 的正交变换为 $f(A)$，于是有映射

$$A\to f(A). \tag{3}$$

自然这是个同态映射. 記此同态的象为 $\mathfrak{T}$. 我們来証明 $\mathfrak{T}$ 由 $\mathfrak{h}_0$ 的所有那些正交变换組成，它們引起根系的一个置換. 实际上，設 σ 是 $\mathfrak{h}_0$ 的一个正交变换，并設 σ 引起根系 Σ 的一个置換. 因此 σ 是 Σ 的一个自合同. 那么根据第五章定理 6，σ 可扩充成 $\mathfrak{g}$ 的一个自同构 A_σ，而 A_σ 对于根的作用与 σ 相同，即 $A_\sigma H_\alpha=\sigma H_\alpha$，对一切 $\alpha\in\Sigma$. 自然 $A_\sigma\in\mathfrak{A}$ 而 $f(A_\sigma)=\sigma$. 以 $\mathfrak{A}^0$ 表示同态(3)的核，于是

$$\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^0\approx\mathfrak{T}. \tag{4}$$

再記 $\mathfrak{A}_0$ 在同态(3)之下的象为 $\mathfrak{S}$，則

$$\mathfrak{A}_0/\mathfrak{A}_0\cap\mathfrak{A}^0\approx\mathfrak{S}. \tag{5}$$

我們再証明

引理 2. $\mathfrak{g}$ 的一个自同构 A 将 $\mathfrak{h}$ 中每个元素都保持不动的充要条件是，有 $\widetilde{H}\in\mathfrak{h}$ 使得 $A=e^{\mathrm{ad}\widetilde{H}}$.

証. 条件的充分性是显然的. 問題在于証明条件的必要性. 設 $A\in\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$, 而 $AH=H$（对一切 $H\in\mathfrak{h}$）. 特别，这时 A 也将每个根都保持不动，于是有

$$AE_\alpha=\nu_\alpha E_\alpha,\quad \nu_\alpha\neq 0.$$

可以选根向量 $E_{\pm\alpha}$ 使

$$[E_\alpha,E_{-\alpha}]=H_\alpha.$$

于是从此关系式推出

$$\nu_\alpha\nu_{-\alpha}=1. \tag{6}$$

又从关系式 $[E_\alpha,E_\beta]=N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}(\beta\neq\pm\alpha)$ 推出，当 $\alpha,\beta,\alpha+\beta\in\Sigma$ 时

$$\nu_\alpha\nu_\beta=\nu_{\alpha+\beta}. \tag{7}$$

設 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是一組基础根系. 对任一根 α，写 $\alpha=\sum_{i=1}^{n}m_i\alpha_i$，其中 m_i 全是非負整数或全是非正整数. 从(6)，(7)两式利用归納法可以証明

$$\nu_\alpha=\prod_{i=1}^{n}\nu_{\alpha_i}^{m_i}.$$

設 $\widetilde{H}\in\mathfrak{h}$，則自同构 $B=e^{\mathrm{ad}\widetilde{H}}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}(\mathrm{ad}\,\widetilde{H})^r$ 将 $\mathfrak{h}$ 中每个元素都保持不变，而对于每个 $\alpha\in\Sigma$，

$$BE_\alpha=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\underbrace{[\widetilde{H},[\widetilde{H},\cdots[\widetilde{H}}_{r\text{个}},E_\alpha]\cdots]]$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\alpha(\widetilde{H})^rE_\alpha=e^{\alpha(\widetilde{H})}E_\alpha.$$

选取 $\widetilde{H}$ 使 $\alpha_i(\widetilde{H}) = \log v_{\alpha_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$；因 $v_{\alpha_i} \neq 0$，故当 $\log v_{\alpha_i}$ 确定时，$\widetilde{H}$ 被唯一确定．于是

$$BE_{\alpha_i} = e^{\alpha_i(\widetilde{H})}E_{\alpha_i} = e^{\log v_{\alpha_i}}E_{\alpha_i} = v_{\alpha_i}E_{\alpha_i}.$$

而一般地有

$$BE_\alpha = e^{\alpha(\widetilde{H})}E_\alpha = e^{\sum_{i=1}^{n} m_i\alpha_i(\widetilde{H})}E_\alpha$$

$$= \prod_{i=1}^{n} (e^{\alpha_i(\widetilde{H})})^{m_i} E_\alpha = \prod_{i=1}^{n} v_{\alpha_i}^{m_i} E_\alpha = v_\alpha E_\alpha.$$

这就証明了 $A = B = e^{\mathrm{ad}\widetilde{H}}$.

从引理 2 立刻推出 $\mathfrak{A}^0 \subset \mathfrak{A}_0$. 因此(5)成为

$$\mathfrak{A}_0/\mathfrak{A}^0 \approx \mathfrak{S}. \tag{8}$$

那么从(4),(8)两式推出

$$\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_0 \approx \mathfrak{T}/\mathfrak{S}.$$

我們再証明

引理 3. $\mathfrak{S} = W$，即 $\mathfrak{g}$ 的那些将 $\mathfrak{h}$ 映到 $\mathfrak{h}$ 的内自同构在 $\mathfrak{h}_0$ 上诱导的线性变换正好构成 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 羣.

証. 証明分两步进行.

1) 先証明 $W \subset \mathfrak{S}$. 这只要証明 $S_\alpha(\alpha \in \Sigma)$ 是形为 $U = e^{\mathrm{ad}X}$ 的一个自同构在 $\mathfrak{h}_0$ 上的誘导卽可. 取

$$X = \frac{i\pi}{\sqrt{2(\alpha, \alpha)}}(E_\alpha + E_{-\alpha}),$$

那么对任一 $H \in \mathfrak{h}$,

$$UH = H + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)!}(\mathrm{ad}\,X)^{2p+1}H +$$

$$+ \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+2)!}(\mathrm{ad}\,X)^{2p+2}H.$$

可是容易驗算

$$(\mathrm{ad}\,X)^{2p+1}H = \frac{(i\pi)^{2p+1}}{\sqrt{2(\alpha, \alpha)}}\alpha(H)(-E_\alpha + E_{-\alpha}),$$

$$(\text{ad } X)^{2p+2}H = \frac{(i\pi)^{2p+2}}{(\alpha, \alpha)} \alpha(H)H_\alpha.$$

那么

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)!} (\text{ad } X)^{2p+1}H$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)!} \frac{(i\pi)^{2p+1}}{\sqrt{2(\alpha, \alpha)}} \alpha(H)(-E_\alpha + E_{-\alpha})$$

$$= \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \pi^{2p+1}}{(2p+1)!}\right) \frac{i}{\sqrt{2(\alpha, \alpha)}} \alpha(H)(-E_\alpha + E_{-\alpha})$$

$$= \sin \pi \frac{i}{\sqrt{2(\alpha, \alpha)}} \alpha(H)(-E_\alpha + E_{-\alpha}) = 0,$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+2)!} (\text{ad } X)^{2p+2}H$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+2)!} \frac{(i\pi)^{2p+2}}{(\alpha, \alpha)} \alpha(H)H_\alpha$$

$$= \frac{\cos \pi - 1}{(\alpha, \alpha)} \alpha(H)H_\alpha.$$

因此对任一 $H \in \mathfrak{h}$, $UH \in \mathfrak{h}$. 这証明了 U 将 $\mathfrak{h}$ 保持不动. 于是根据引理 1、U 誘导出 $\mathfrak{h}_0$ 的一个正交变换而且引起根的一个置换. 又根据上面的計算知,对一切 $H \in P_\alpha$, $UH = H$. 而 P_α 由方程 $\alpha(H) = 0$ 所定义, 卽 U 将 P_α 中向量都保持不动. 仍根据上面的計算有

$$UH_\alpha = H_\alpha + \frac{\cos \pi - 1}{(\alpha, \alpha)} \alpha(H_\alpha)H_\alpha = -H_\alpha.$$

所以 U 在 $\mathfrak{h}_0$ 中誘导的变换恰好是对于超平面 P_α 的反射 S_α. 这就是所要証明的.

2) 現在再来証明 $\mathfrak{S} = W$.

設 $\tau \in \mathfrak{S}$. τ 引起根系 Σ 的一个自合同, 因而将 Σ 的一組基础根系 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 变到另一組基础根系 $\{\tau\alpha_1, \tau\alpha_2, \cdots, \tau\alpha_n\}$.

于是 τ 就把 $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 所确定的 Weyl 間

$$C_0=\{H\in\mathfrak{h}_0 \text{ 使得 } \alpha_i(H)>0, \text{ 对 } i=1, 2, \cdots, n\}$$

变到由 $\{\tau\alpha_1, \tau\alpha_2, \cdots, \tau\alpha_n\}$ 所确定的 Weyl 間

$$C_1=\{H\in\mathfrak{h}_0 \text{ 使得 } \tau\alpha_i(H)>0, \text{ 对 } i=1, 2, \cdots, n\}.$$

因 Weyl 羣 W 可递地作用在諸 Weyl 間之上，故有 $S\in W$ 使 $S(C_0)=C_1$。于是 $S^{-1}\tau(C_0)=C_0$. 令 $\tau_1=S^{-1}\tau$，则 $\tau_1\in\mathfrak{S}$ 而 $\tau_1(C_0)=C_0$. 只要証 $\tau_1\in W$ 即可.

将 τ_1 扩充成 $\mathfrak{g}$ 的一个内自同构 A_{τ_1} 使得

$$A_{\tau_1}(H_\alpha)=\tau_1(H_\alpha), \text{ 对一切 } \alpha\in\Sigma,$$

那么 $A_{\tau_1}\mathfrak{h}=\mathfrak{h}$，因此 $A_{\tau_1}\in\mathfrak{A}_0$. 如果我們能証明有 $\widetilde{H}\in\mathfrak{h}$ 使得 $A_{\tau_1}=e^{\mathrm{ad}\widetilde{H}}$，那么 A_{τ_1} 就将 $\mathfrak{h}$ 中每个元素都保持不动，于是 τ_1 是 $\mathfrak{h}_0$ 上的恆同变換，自然有 $\tau_1\in W$.

τ_1 也可看成是 $\mathfrak{h}_0^*$ 的一个正交变換，而引起根系的一个置換，如果对一切 $\xi\in\mathfrak{h}_0^*$，定义 $\tau\xi=\tau H_\xi$. 而对所有 $H\in\mathfrak{h}$，H_ξ 由条件 $\xi(H)=(H, H_\xi)$ 唯一确定. 将 τ_1 表成根的相异輪換之积 $\tau_1=\sigma_1\cdots\sigma_p$. 相应于这个分解，我們写

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\sum_{i=1}^{p}\mathfrak{g}^{\sigma_i},$$

而 $\mathfrak{g}^{\sigma_i}$ 是 σ_i 中所包含的根的相应根子空間的直和，则 $\mathfrak{g}^{\sigma_i}$ 是 A_{τ_1} 的不变子空間. 設 σ 是 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_p$ 中之一，写 $\sigma=(\alpha, \sigma(\alpha), \cdots, \sigma^{q-1}(\alpha))$，$q$ 为輪換 σ 之長，那么 $\mathfrak{g}^\sigma$ 有一組基 E_α, $E_{\sigma(\alpha)}$, $\cdots$, $E_{\sigma^{q-1}(\alpha)}$. 令

$$A_{\tau_1}E_{\sigma^k(\alpha)}=\nu_{k+1}E_{\sigma^{k+1}(\alpha)}, \quad k=0, 1, \cdots, q-1$$

于是在 $\mathfrak{g}^\sigma$ 中，A_{τ_1} 对于基 E_α, $E_{\sigma(\alpha)}$, $\cdots$, $E_{\sigma^{q-1}(\alpha)}$ 的矩陣是

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \nu_q \\ \nu_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \nu_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \nu_{q-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

因此在 $\mathfrak{g}^{\sigma}$ 中 A_{τ_1} 的特征方程是

$$\lambda^q - \nu_1\nu_2\cdots\nu_q = 0.$$

在上述討論中，如用 $A_{\tau_1}B$ 代替 A_{τ_1}，其中 $B = e^{\mathrm{ad}H}, H \in \mathfrak{h}$，也有 $A_{\tau_1}B \in \mathfrak{A}_0$ 而且 $A_{\tau_1}B$ 在根上引起的置换与 A_{τ_1} 所引起的相同．因此以上討論对 $A_{\tau_1}B$ 也有效． 这时 $A_{\tau_1}B$ 在 $\mathfrak{g}^{\sigma}$ 中的特征方程将是

$$\lambda^q - \nu_1'\nu_2'\cdots\nu_q' = 0.$$

由于 $\mathrm{ad}\, H E_{\sigma^k(\alpha)} = \sigma^k(\alpha)(H) E_{\sigma^k(\alpha)}$，故 $e^{\mathrm{ad}\,H} E_{\sigma^k(\alpha)} = e^{\sigma^k(\alpha)(H)} E_{\sigma^k(\alpha)}$，于是 $\nu_k' = e^{\sigma^{k-1}(\alpha)(H)}\nu_k$． 因此 $A_{\tau_1}B$ 在 $\mathfrak{g}^{\sigma}$ 中的特征方程也可写作

$$\lambda^q - e^{\sum_{k=1}^{q}\sigma^{k-1}(\alpha)(H)}\nu_1\nu_2\cdots\nu_q = 0.$$

令

$$C_0 = \{\xi \in \mathfrak{h}_0^* \text{ 使得 } (\alpha_i, \xi) > 0, \text{ 对 } i = 1, 2, \cdots, n\}.$$

因 $\tau_1(C_0) = C_0$，故 $\tau_1(\Sigma_+) = \Sigma_+$，$\tau_1(\Sigma_-) = \Sigma_-$． 因此 $\alpha, \sigma(\alpha), \cdots, \sigma^{q-1}(\alpha)$ 或者全都是正根，或者全都是負根．所以 $\sum_{k=1}^{q}\sigma^{k-1}(\alpha) \neq 0$． 那么可以选取 $H \in \mathfrak{h}$ 使得

$$e^{\sum_{k=1}^{q}\sigma^{k-1}(\alpha)(H)}\nu_1\cdots\nu_q \neq 1$$

对 $\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_p$ 都成立． 于是 $A_{\tau_1}B$ 在 $\sum_{i=1}^{p}\mathfrak{g}^{\sigma_i}$ 中不能以 1 作为特征根，因此

$$\mathfrak{g}^1_{A_{\tau_1}B} \cap \left(\sum_{i=1}^{p}\mathfrak{g}^{\sigma_i}\right) = (0),$$

这里置

$$\mathfrak{g}^1_{A_{\tau_1}B} = \{X \in \mathfrak{g} \text{ 使得有非負整数 } m \text{ 存在，使 } (A_{\tau_1}B - I)^m X = 0\}.$$

于是 $\mathfrak{g}^1_{A_{\tau_1}B} \subset \mathfrak{h}$.

我們先証明

引理 4. 設 $A\in \mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$, 則 $\dim \mathfrak{g}_A^1 \geqslant n$, 这里 n 是 $\mathfrak{g}$ 的秩, 也是 $\mathfrak{h}$ 的維数.

証. 先設 $A=e^{\mathrm{ad}\,X}, X\in\mathfrak{g}$. 这时自然有 $\mathfrak{g}_A^1 \supset \mathfrak{g}_{\mathrm{ad}X}^0$ 因 $\dim \mathfrak{g}_X^0 \geqslant n$, 故这时引理 4 成立. 因此引理 4 对于 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 的单位元的一个充分小的邻域中的 A 成立.

現在任取一 $A\in \mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$. 因 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 是連通李羣, A 与 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 的单位元 I 可用一条閉曲綫相連, 而这条閉曲綫可用有限个坐标开邻域 $U_1, U_2, \cdots, U_m$ 盖住, 并可假定 $U_1\ni I$, $U_m\ni A$, 而 $U_i\cap U_{i+1}\neq\phi$ $(i=1,2,\cdots,m-1)$. 还可設引理 3 对 U_1 中的自同构 A 成立. 現設 $A\in U_2$, 写

$$\det(\lambda I-A)=\sum_{j=0}^{r}(\lambda-1)^j\varphi_j(A),$$

其中 r 为 $\mathfrak{g}$ 的維数, $\varphi_0(A), \varphi_1(A), \cdots, \varphi_r(A)$ 都是 A 的解析函数. 对于 $A\in U_1\cap U_2$, 我們有 $\varphi_0(A)\equiv\varphi_1(A)\equiv\cdots\equiv\varphi_{n-1}(A)\equiv 0$. 因此对于 $A\in U_2$, $\varphi_0(A)\equiv\varphi_1(A)\equiv\cdots\equiv\varphi_{n-1}(A)\equiv 0$ 也成立. 这証明了引理 4 对于 U_2 中的自同构 A 也成立. 如此継續下去, 即可証明引理 4 对于所取的 A 成立.

我們再回过头来継續証明引理 3. 将引理 4 应用到 $A_{\tau_1}B$ 上就得出 $\dim \mathfrak{g}_{A_{\tau_1}B}^1 \geqslant \dim\mathfrak{h}$. 但已証得 $\mathfrak{g}_{A_{\tau_1}B}^1\subset\mathfrak{h}$, 故有 $\mathfrak{g}_{A_{\tau_1}B}^1=\mathfrak{h}$. 注意 $A_{\tau_1}B$ 引起欧氏空間 $\mathfrak{h}_0$ 上的一个正交变换, 而它的特征根又都是 1; 因正交变换的初等因子都是单的, 故 $A_{\tau_1}B$ 在 $\mathfrak{h}_0$ 上誘导出恆同变换, 因此 $A_{\tau_1}B$ 在 $\mathfrak{h}$ 上也誘导出恆同变换. 根据引理 2, 有 $H'\in\mathfrak{h}$ 使 $A_{\tau_1}B=e^{\mathrm{ad}\,H'}$, 于是 $A_{\tau_1}=e^{\mathrm{ad}\,(H'-H)}$. 这就是我們所要証明的.

这样引理 3 就完全証明了.

綜合上面的討論, 我們得到下面的定理.

定理 5. 設 $\mathfrak{g}$ 是个半单李代数, 用 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 表示 $\mathfrak{g}$ 的自同构羣. 用 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 表示 $\mathfrak{g}$ 的內自同构羣. 再設 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数. 用 $\mathfrak{T}$ 表 $\mathfrak{h}_0$ 中所有那种正交变换所組成的羣, 它們每一个都引起 $\mathfrak{g}$

的根系的一个置换. 再以W表 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 羣, 那么 W 是 $\mathfrak{T}$ 的正規子羣而且

$$\operatorname{Aut}\mathfrak{g}/\operatorname{Ad}\mathfrak{g} \approx \mathfrak{T}/W,$$

这个定理有下面这个系理.

系理. 半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的外自同构羣与这样一个有限羣 G 同构, G 由 $\mathfrak{g}$ 的一組基础根系 Π 的所有自合同組成.

証. 只要証 $\mathfrak{T}/W$ 与 G 同构卽可. 因 $\mathfrak{g}$ 的基础根系 Π 組成 $\mathfrak{h}_0^*$ 的一組基, 故 G 是 $\mathfrak{T}$ 的一个子羣. 設 $\tau\in G$, 令

$$\tau \rightarrow \tau W, \tag{9}$$

这是一个从 G 映入 $\mathfrak{T}/W$ 的同态. 此同态的核是 $G\cap W$. 因 W 是作用在諸 Weyl 間之上的正則置换羣, 故 $G\cap W$ 仅由恆同变换組成. 我們再証明此同态将 G 映上 $\mathfrak{T}/W$. 設 $\sigma\in\mathfrak{T}$, 可設 σ^{-1} 将由 Π 所确定的 Weyl 間 C_0 映成另一 Weyl 間 C_1, 卽 $\sigma^{-1}(C_0)=C_1$. 因 Weyl 羣 W 可遞地作用在諸 Weyl 間之上, 故可設有 $S\in W$ 使 $S(C_0)=C_1$. 于是 $\sigma S(C_0)=C_0$. 这样 $\sigma_1=\sigma S$ 就是基础根系 Π 的一个自合同, 卽 $\sigma_1\in G$. 显然有 $\sigma_1 W=\sigma SW=\sigma W$. 这証明了同态(9)将 G 映到 $\mathfrak{T}/W$ 之上, 于是

$$G\approx\mathfrak{T}/W.$$

这个系理还可推广成下面这个較強的形式.

定理 6. 設 $\mathfrak{g}$ 是个半单李代数, 以 $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ 表示 $\mathfrak{g}$ 的自同构羣, 以 $\operatorname{Ad}\mathfrak{g}$ 表示 $\mathfrak{g}$ 的內自同构羣. 設 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数, $\Pi=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 相对于 $\mathfrak{h}$ 的根系的一組基础根系. 对每个 $\alpha_i\in\Pi$ 选 $E_{\pm\alpha_i}\in\mathfrak{g}^{\pm\alpha_i}$ 使 $(E_{\alpha_i}, E_{-\alpha_i})=1$. 那么 Π 的每个自合同 σ 都可以唯一地扩充成 $\mathfrak{g}$ 的一个自同构 A_σ, 并有性質:

$$A_\sigma(E_{\pm\alpha_i})=E_{\pm\sigma(\alpha_i)}, \quad i=1, 2, \cdots, n. \tag{10}$$

一切这种自同构組成一羣, 它与 Π 的所有自合同組成之羣同构. 記此羣为 G', 那么

$$\operatorname{Aut}\mathfrak{g}=G'\operatorname{Ad}\mathfrak{g}, \quad G'\cap\operatorname{Ad}\mathfrak{g}=\{I\}.$$

証. Π 的每个自合同 σ 都可以唯一地扩充成 $\mathfrak{g}$ 的一个具有

性質(10)的自同构 A_σ，这是第六章定理 3 所証明的. 所有这种自同构 A_σ 組成一羣 G'，它与 Π 的自合同羣 G 同构是显然的，于是根据定理 5 的系理就有

$$\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}/\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g} \approx G'.$$

又因 G' 是 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 的子羣而 G' 中只有恆同自同构才是內自同构，故

$$\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g} = G'\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}, \quad G' \cap \mathrm{Ad}\,\mathfrak{g} = \{I\}.$$

这就証明了定理 6。

利用定理 6 或者利用定理 5 的系理，可以确定出单李代数的外自同构羣.

系理. 单李代数的外自同构羣如下表所示：

单　代　数	A_1	$A_n(n>1)$	$B_n(n\geqslant 1)$	$C_n(n\geqslant 1)$	$D_n(n\geqq 3, n\neq 4)$
外自同构羣	$\{I\}$	2 阶循环羣	$\{I\}$	$\{I\}$	2 阶循环羣

D_4	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
三个文字的对称羣	2 阶循环羣	$\{I\}$	$\{I\}$	$\{I\}$	$\{I\}$

最后，我們来具体定出典型李代数的自同构羣.

我們知道 A_n 是全体行列式为 1 的$(n+1)\times(n+1)$复系数矩陣所組成之羣 $SL(n+1, C)$ 的李代数. $SL(n+1, C)$的內自同构有形状

$$Z \to PZP^{-1}, \quad 对一切\ Z \in SL(n+1, C),$$

其中 $P \in SL(n+1, C)$. 这样一个自同构的微分是

$$X \to PXP^{-1}, \quad 对一切\ X \in A_n.$$

因此 A_n 的內自同构羣是 $SL(n+1, C)$ 对于它的中心的商羣，此羣記作 $PSL(n+1, C)$. 易証 $SL(n+1, C)$ 的中心是由 $e^{\frac{2\pi i}{n+1}} I_{n+1}$ 生成的 $n+1$ 阶循环羣. 当 $n>1$ 时

$$X \to -X'$$

是 A_n 的一个外自同构.

B_n 是由一切行列式为 1 且适合条件

$$Z\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&I_n\\0&I_n&0\end{pmatrix}Z'=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&I_n\\0&I_n&0\end{pmatrix}$$

的矩陣 Z 所組成的羣 $SO(2n+1, C)$ 的李代数. 可証 $SO(2n+1, C)$ 的中心仅含单位矩陣. 因此，同理可証，B_n 的內自同构羣(亦卽外自同构羣)是 $SO(2n+1, C)$.

C_n 是由一切适合条件

$$Z\begin{pmatrix}0&I_m\\-I_m&0\end{pmatrix}Z'=\begin{pmatrix}0&I_m\\-I_m&0\end{pmatrix}$$

的矩陣 Z 所組成的羣 $Sp(2n, C)$ 的李代数. 可証 $Sp(2n, C)$ 的中心由 $\pm I_{2n}$ 組成. 記 $Sp(2n, C)$ 对于它的中心 $\{\pm I_{2n}\}$ 的商羣为 $PSp(2n, C)$. 同理可証 $PSp(2n, C)$ 就是 C_n 的內自同构羣(也是外自同构羣).

D_n 是由一切行列式为 1 且适合条件

$$Z\begin{pmatrix}0&I_n\\I_n&0\end{pmatrix}Z'=\begin{pmatrix}0&I_n\\I_n&0\end{pmatrix} \tag{11}$$

的矩陣 Z 所組成的羣 $SO(2n, C)$ 的李代数. 可証 $SO(2n, C)$ 的中心由 $\pm I_{2n}$ 組成. 記 $SO(2n, C)$ 对于它的中心 $\{\pm I_{2n}\}$ 的商羣为 $PSO(2n, C)$. 同理可証 $PSO(2n, C)$ 是 D_n 的內自同构羣. 全体适合条件 (11) 的矩陣組成一羣，記作 $O(2n, C)$. 如 $P\in O(2n, C)$ 而 $\det P=-1$，那么

$$X\to PXP^{-1}\quad (X\in D_n)$$

就是 D_n 的一个外自同构. 于是当 $n\geqslant 3$ 而 $n\neq 4$ 时，D_n 的自同构羣就是 $O(2n, C)$ 对于它的中心 $\{\pm I_{2n}\}$ 的商羣 $PO(2n, C)$.

利用以上这些討論，我們可以导出低維典型羣之間的一些同构关系. 例如，从 $A_1\approx B_1\approx C_1$ 导出 $PSL(2,C)\approx SO(3,C)\approx PSp(2, C)$. 又从 $B_2\approx C_2$ 导出 $SO(5, C)\approx PSp(4, C)$. 又从 $A_3\approx D_3$ 导出 $PSL(4, C)\approx PSO(6, C)$.

第九章 李代数的表示

§1. 基本概念

設 $\mathfrak{g}$ 是个李代数而 V 是复数域上的一个有限維向量空間. 从 $\mathfrak{g}$ 映入李代数 $\mathfrak{gl}(V)$ 的一个同态 ρ:

$$X \to \rho(X) \tag{1}$$

称为 $\mathfrak{g}$ 的一个綫性表示，或簡称表示，而 V 称为表示 ρ 的表示空間，V 的維数称为表示 ρ 的級数. 如在 V 中选取一組基 $e_1, e_2, \cdots, e_N$,这里 $N = \dim V$,并設

$$\rho(X)e_j = \sum_{i=1}^{N} a_{ij}(X)e_i, \quad j = 1, 2, \cdots, N,$$

那么

$$X \to (a_{ij}(X))_{1 \leqslant i, j \leqslant N} \tag{2}$$

就是从 $\mathfrak{g}$ 映入李代数 $\mathfrak{gl}(N, C)$ 的一个同态,这个同态称为 $\mathfrak{g}$ 的一个矩陣表示. 对于 V 的另一組基 $e_1', e_2', \cdots, e_N'$,設

$$\rho(X)e_j' = \sum_{i=1}^{N} b_{ij}(X)e_i', \quad j = 1, 2, \cdots, N,$$

那么

$$X \to (b_{ij}(X))_{1 \leqslant i, j \leqslant N} \tag{3}$$

也是 $\mathfrak{g}$ 的一个矩陣表示. 設关联 V 的上述两組基的矩陣是 (p_{ij}), 即

$$e_j' = \sum_{i=1}^{N} p_{ij}e_i, \quad j = 1, 2, \cdots, N,$$

則

$$(b_{ij}(X)) = (p_{ij})^{-1}(a_{ij}(X))(p_{ij}), \quad X \in \mathfrak{g}. \tag{4}$$

一般說来，$\mathfrak{g}$ 的两个矩陣表示 (2) 和 (3) 如由 (4) 式所关联,其中 (p_{ij}) 为 $N \times N$ 可逆矩陣,就称为等价.

設 ρ_1 和 ρ_2 是 $\mathfrak{g}$ 的两个綫性表示，它們的表示空間分別是 V_1 和 V_2。我們說 ρ_1 和 ρ_2 等价，如果有一个一对一的綫性映射 P，将 V_1 映到 V_2 之上且对一切 $X\in\mathfrak{g}$ 有性質：

$$P\rho_1(X)=\rho_2(X)P.$$

这时我們說表示空間 V_1 和 V_2 同构，記作 $V_1\approx V_2$。同构的表示空間一定有相同的維数。設在 V_1 和 V_2 中选定了基 $e_{11},\cdots,e_{1N}$ 和 $e_{21},\cdots,e_{2N}$，这里 $N=\dim V_1=\dim V_2$，以 $\tilde{\rho}_i(X)$ 表 $\rho_i(X)$ 相对于 V_i 的基 $e_{i1},\cdots,e_{iN}$ 的矩陣，以 (p_{ij}) 表 P 相对于这两組基的矩陣，即

$$Pe_{1j}=\sum_{i=1}^{N}p_{ij}e_{2i},\quad j=1,2,\cdots,N$$

那么

$$\tilde{\rho}_1(X)=(p_{ij})^{-1}\tilde{\rho}_2(X)(p_{ij}).$$

特別，如选取 $e_{21}=Pe_{11},\cdots,e_{2N}=Pe_{1N}$，則

$$\tilde{\rho}_1(X)=\tilde{\rho}_2(X).$$

以下說到表示，我們总指綫性表示。

李代数表示論的基本問題之一就是寻求一李代数的一切两两不等价的表示。

李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示 ρ 称为不可約，如果 ρ 的表示空間 V 在 $\rho(\mathfrak{g})$ 的作用下是不可約的；否則 ρ 称为可約。

設李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示 ρ 可約，則 ρ 的表示空間 V 包有一个旣 $\neq V$ 又 $\neq\{0\}$ 的不变子空間 V_1。对于商空間 V/V_1 中任一向量 $v+V_1$ 和 $X\in\mathfrak{g}$，定义

$$\tilde{\rho}(X)(v+V_1)=\rho(X)v+V_1.$$

利用 V_1 的不变性可証此定义与 v 的选取无关。更进一步可以証明，映射

$$X\to\tilde{\rho}(X)$$

是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示，这个表示的表示空間是商空間 V/V_1。

設 ρ 的表示空間 V 分解成若干个在 $\rho(\mathfrak{g})$ 的作用下不变的子空間 $V_1,\cdots,V_s$ 的直和，于是 ρ 在每个 V_i 上都誘导出一个表

示 ρ_i:

$$\rho_i(X)v_i = \rho(X)v_i, \quad X \in \mathfrak{g}, \quad v_i \in V_i.$$

这时我們說 ρ 分解成表示 $\rho_1, \cdots, \rho_s$ 的和,記作 $\rho = \rho_1 + \rho_2 + \cdots + \rho_s$. 如果 ρ 可以分解成一些不可約表示的和, 就說 ρ **完全可約**.

設 $\mathfrak{g}$ 是个李代数,則映射

$$X \to \operatorname{ad} X \quad X \in \mathfrak{g}$$

就是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示, 表示空間就是 $\mathfrak{g}$ 本身. 这个表示称为 $\mathfrak{g}$ 的**正則表示**. 正則表示的不变子空間就是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 如果 $\mathfrak{g}$ 半单, 則 $\mathfrak{g}$ 的正則表示完全可約.

定理 1. 設李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示 ρ 完全可約,而 $\rho = \rho_1 + \cdots + \rho_r = \rho_1' + \cdots + \rho_s'$ 是 ρ 分解成不可約表示的和的两种方法, 則 $r=s$, 而且可以重排 $\rho_1', \cdots, \rho_s'$ 使 ρ_i 和 ρ_i' 等价 $(i = 1, 2, \cdots, r)$.

証. 相应于分解 $\rho = \rho_1 + \cdots + \rho_r$, 表示空間 V 有分解 $V = V_1 \dotplus \cdots \dotplus V_r$, 其中 V_i 都是不可約的. 相应于分解 $\rho = \rho_1' + \cdots + \rho_s'$, 表示空間 V 有分解 $V = V_1' + \cdots + V_s'$,其中 V_j' 都是不可約的.

考察 $V = V_1 + V_1' + \cdots + V_s'$. 对任一 $k(1 \leqslant k \leqslant s)$, 因 V_k' 不可約, 所以或者 $(V_1 + V_1' + \cdots + V_{k-1}') \cap V_k' = (0)$ 或者 $(V_1 + V_1' + \cdots + V_{k-1}') \cap V_k' = V_k'$. 在前一情形, $V_1 + V_1' + \cdots + V_{k-1}' + V_k' = (V_1 + V_1' + \cdots + V_{k-1}') \dotplus V_k'$, 而在后一情形, $V_1 + V_1' + \cdots + V_{k-1}' + V_k' = V_1 + V_1' + \cdots + V_{k-1}'$. 因此我們可以在 $V_1', \cdots, V_s'$ 中删除某些之后得到 V 的一个直和分解. 將 $V_1', \cdots, V_s'$ 重排后可以假定

$$V = V_1 \dotplus V_i' \dotplus V_{i+1}' \dotplus \cdots \dotplus V_s'.$$

于是

$$V_1 \approx V/V_i' \dotplus \cdots \dotplus V_s' \approx V_1' \dotplus \cdots \dotplus V_{i-1}'.$$

因 V_1 不可約,故 $i = 2$. 于是

$$V = V_1 \dotplus V_2' \dotplus V_3' \dotplus \cdots \dotplus V_s',$$

而且 $V_1 \approx V_1'$,即 ρ_1 和 ρ_1' 等价.

再考察 $V = V_1 + V_2 + V_2' + V_3' + \cdots + V_s'$. 仍然利用同样的推理方法,可以在 $V_2', \cdots, V_s'$ 中删除一个，設为 V_2',使

$$V = V_1 \dot{+} V_2 \dot{+} V_3' \dot{+} \cdots \dot{+} V_s'.$$

这样 $V_2 \approx V_2'$,即 ρ_2 和 ρ_2' 等价.

如此继續下去，可得 $r = s$ 以及重排 $\rho_1', \cdots, \rho_s'$ 之后总有 ρ_i 和 ρ_i' 等价 $(i = 1, 2, \cdots, r)$. 这就証明了定理 1.

根据定理 1,如李代数 $\mathfrak{g}$ 的任一表示皆完全可約,則求 $\mathfrak{g}$ 的一切两两不等价的表示这一問題就化为求 $\mathfrak{g}$ 的一切两两不等价的不可約表示的間題.

以下我們介紹表示的一些运算:

1) 設 ρ_1 和 ρ_2 都是李代数的表示,表示空間各为 V_1 和 V_2. 命 $V = V_1 \dot{+} V_2$. 对一切 $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ 以及任意 $X \in \mathfrak{g}$,定义

$$\rho(X)(v_1 + v_2) = \rho_1(X)v_1 + \rho_2(X)v_2.$$

这样

$$X \to \rho(X)$$

就是 ρ 的一个表示，表示空間为 $V = V_1 \dot{+} V_2$. 自然 ρ 可分解成 ρ_1 和 ρ_2 的和,我們說表示 ρ 是 ρ_1 与 ρ_2 的**和**.

2) 仍設 ρ_1 和 ρ_2 是 $\mathfrak{g}$ 的表示,表示空間各为 V_1 和 V_2. 命 $V = V_1 \otimes V_2$ (空間 V_1 和 V_2 的张量积或 Kronecker 积). 对一切 $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ 以及任意 $X \in \mathfrak{g}$, 定义

$$\rho(X)(v_1 \otimes v_2) = \rho_1(X)v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes \rho_2(X)v_2.$$

这时

$$X \to \rho(X)$$

也是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示,称为 ρ_1 和 ρ_2 的 Kronecker **积**.

3) 再設 ρ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示, 表示空間为 V. 以 V^* 表 V 的对偶空間. 对任意 $X \in \mathfrak{g}$,按公式

$$(v, \rho^*(X)v^*) = -(\rho(X)v, v^*), \quad v \in V, \quad v^* \in V^*$$

来定义 $\mathfrak{g}$ 的一个表示 ρ^*, ρ^* 称为 ρ 的**星表示**或**逆步表示**.

§2. Schur 引 理

在表示論中，Schur 引理实属基本.

引理 1. 如果李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示 ρ 是不可約的，那么与每个綫性变换 $\rho(X)$ ($X\in\mathfrak{g}$) 都交换的綫性变换一定是恆同綫性变换 I 的倍数;换言之,从关系式

$$\rho(X)A = A\rho(X) \tag{1}$$

对一切 $X\in\mathfrak{g}$, 推出等式

$$A = \lambda I,$$

其中 λ 为一复数.

証. 以 V 表 ρ 的表示空間. 綫性变换 A 至少有一特征値,設为 λ. 以 V_1 表 V 中一切适合条件 $Av=\lambda v$ 的向量 v 所組成的集合,則 V_1 是 V 的一个非零子空間. 又如 $v\in V_1$,則由(1)式得

$$A(\rho(X)v) = \rho(X)Av = \rho(X)\lambda v = \lambda\rho(X)v,$$

即 $\rho(X)v\in V_1$. 因此 V_1 在 ρ 的作用下不变,因表示 ρ 不可約,故一定有 $V_1=V$,因此 $A=\lambda I$.

引理 2. 設 ρ_1 和 ρ_2 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的两个不可約表示,它們分别作用在空間 V_1 和 V_2 之上. 設有从 V_2 映入 V_1 的綫性变换 A, 对一切 $X\in\mathfrak{g}$,它满足条件

$$\rho_1(X)A = A\rho_2(X), \tag{2}$$

那么或者 $A=0$,或者 A 可逆,即 A 将 V_2 映到 V_1 之上,这时 ρ_1 和 ρ_2 一定等价. 因此,如果 ρ_1 和 ρ_2 不等价,那么一定有 $A=0$.

証. 設 A 的核为 V_2', 它是 V_2 的一个子空間,它由 V_2 中一切适合条件 $Av_2=0$ 的向量 v_2 組成. 設 $v_2\in V_2'$,則由(2)式有

$$A(\rho_2(X)v_2) = \rho_1(X)Av_2 = 0,$$

于是 $\rho_2(X)v_2\in V_2'$. 这就是說, V_2' 在 ρ_2 的作用下不变. 因 ρ_2 不可約,故一定有 $V_2'=V_2$ 或 $V_2'=\{0\}$. 如果 $V_2'=V_2$,則 $A=0$. 以下設 $V_2'=\{0\}$,这时 A 一一地将 V_2 映入 V_1.

再考察 A 的象集 $V_1'=AV_2$. 自然 V_1' 是 V_1 的子空間. 設

$v_1 \in V_1'$，記 $v_1 = Av_2$ 而 $v_2 \in V_2$，則由(2)式有

$$\rho_1(X)v_1 = \rho_1(X)Av_2 = A(\rho_2(X)v_2) \in AV_2 = V_1'.$$

因此 V_1' 在 ρ_1 的作用下不变．因表示 ρ_1 不可約，故一定有 $V_1' = \{0\}$ 或 $V_1' = V_1$．如 $V_1' = \{0\}$，則 $A = 0$．如 $V_1' = V_1$，則 A 将 V_2 一一地映到 V_1 之上，因而 ρ_1 和 ρ_2 等价．

§ 3. 一个例子——三維单李代数的表示

所有 3×3 的复系数斜对称矩陣組成一个三維单代数 $\mathfrak{g}_3$．令

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

則 M_1、M_2，M_3 組成 $\mathfrak{g}_3$ 的一組基，而結构公式是

$$[M_1, M_2] = M_3, \quad [M_2, M_3] = M_1, \quad [M_3, M_1] = M_2.$$

命

$$H = iM_3, \quad E_1 = i(M_1 + iM_2), \quad E_{-1} = i(M_1 - iM_2),$$

則

$$[H, E_1] = E_1, \quad [H, E_{-1}] = -E_{-1}, \quad [E_1, E_{-1}] = 2H.$$

这表明 $\mathfrak{h} = \{H\}$ 是 $\mathfrak{g}_3$ 的一个 Cartan 子代数，$\mathfrak{h}$ 的两个根是 λ 和 $-\lambda$，

$$[\lambda H, E_1] = \lambda E_1, \quad [\lambda H, E_{-1}] = -\lambda E_1,$$

而相应的根向量是 E_1 和 E_{-1}.

我們来研究 $\mathfrak{g}_3$ 的表示．設 ρ 是 $\mathfrak{g}_3$ 的一个表示，表示空間为 V．我們把 $\rho(H)$ 的特征根称为 ρ 的**权**，而 $\rho(H)$ 的非零特征向量称为 ρ 的**权向量**．首先我們有

引理 3. 設 v 是 ρ 的一个权向量，相应于权 m，即 $\rho(H)v = mv$．如果 $\rho(E_1)v \neq 0$，則 $\rho(E_1)v$ 是相应于权 $m+1$ 的权向

量；如果 $\rho(E_{-1})v \neq 0$，則 $\rho(E_{-1})v$ 是相应于权 $m-1$ 的权向量.

証。 我們有

$$\rho(H)\rho(E_1)v = \rho([H, E_1])v + \rho(E_1)\rho(H)v = \\ = \rho(E_1)v + \rho(E_1)mv = (m+1)\rho(E_1)v.$$

同理

$$\rho(H)\rho(E_{-1})v = (m-1)\rho(E_{-1})v.$$

从这两个式子即可推出引理 3 的結論.

因 V 是有限維的，所以根据引理 3，ρ 总有一个权向量 v 而 $\rho(E_1)v = 0$. 設 v 的权是 j，記 $v = v_j$，即

$$\rho(H)v_j = jv_j.$$

置

$$v_{j-1} = \rho(E_{-1})v_j, \quad v_{j-2} = \rho(E_{-1})v_{j-1}, \cdots.$$

我們有

$$\begin{aligned} \rho(E_1)v_j &= 0, \\ \rho(E_1)v_{j-1} &= \rho(E_1)\rho(E_{-1})v_j = \\ &= \rho([E_1, E_{-1}])v_j + \rho(E_{-1})\rho(E_1)v_j = \\ &= \rho(2H)v_j = 2jv_j. \end{aligned}$$

一般地

$$\rho(E_1)v_m = (j-m)(j+m+1)v_{m+1}.$$

实际上，如上式对 m 成立，則对 $m-1$ 也成立：

$$\begin{aligned} \rho(E_1)v_{m-1} &= \rho(E_1)\rho(E_{-1})v_m = \\ &= \rho([E_1, E_{-1}])v_m + \rho(E_{-1})\rho(E_1)v_m = \\ &= \rho(2H)v_m + \rho(E_{-1})(j-m)(j+m+1)v_{m+1} = \\ &= 2mv_m + (j-m)(j+m+1)v_m = \\ &= (j-m+1)(j+m)v_m. \end{aligned}$$

設 j' 是第一个数，使

$$v_{j'} \neq 0 \quad 而 \quad \rho(E_{-1})v_{j'} = v_{j'-1} = 0.$$

于是从 $\rho(E_1)v_{j'-1} = 0$ 推出

$$(j-j'+1)(j+j') = 0.$$

因 $j-j'$ 为一非負整数,故 $j'=-j$. 这样 j 为非負整数或半整数。更进一步,可以証明

$$v_j, v_{j-1}, \cdots, v_{-j}$$

生成 ρ 的一个不可約不变子空間. 实际上,以 V_j 表由 $v_j, v_{j-1}, \cdots, v_{-j}$ 所生成的子空間. 因为

$$\left.\begin{aligned}&\rho(H)v_m = mv_m,\\&\rho(E_{-1})v_m = v_{m-1}, \qquad\qquad (m=j, j-1, \cdots, -j)\\&\rho(E_1)v_m=(j-m)(j+m+1)v_{m+1},\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

其中置 $v_{j+1}=v_{-j-1}=0$, 所以 V_j 在 ρ 的作用下不变. 其次,設 V' 是 V_j 的一个在 ρ 的作用下不变的子空間,設 $V'\neq 0$, 那么 $\rho(H)$ 在 V' 中一定有一个特征值,設为 k,则 k 必为 $j, j-1, \cdots, -j$ 之一. 因 V_j 中 $\rho(H)$ 的特征值都是单的,故 V' 一定含有 v_k. 那么利用(1)式卽可推出 $v_j, v_{j-1}, \cdots, v_{-j}$ 都属于 V'. 于是 $V'=V_j$. 这証明了 V_j 的不可約性. 特别,如 ρ 不可約,则 $V_j=V$,这时我們把 j 称为 ρ 的首权,于是我們証明了

定理 2. 設 ρ 是 $\mathfrak{g}_3$ 的一个不可約表示,表示空間为 V,于是 $\dim V=2j+1$,其中 j 为非負整数或半整数,而且我們可以在 V 中选一組基 $v_j, v_{j-1}, \cdots, v_{-j}$ 使

$$\left.\begin{aligned}&\rho(H)v_m = mv_m,\\&\rho(E_{-1})v_m = v_{m-1}, \qquad\qquad (m=j, j-1, \cdots, -j)\\&\rho(E_1)v_m=(j-m)(j+m+1)v_{m+1},\end{aligned}\right\}$$

其中置 $v_{j+1}=v_{-j-1}=0$. 因此,$\mathfrak{g}_3$ 的两个不可約表示等价当且仅当它們有相同的首权.

反过来我們有

定理 3. 任給一个非負整数或半整数 j, 可按公式(1)来定义 $\mathfrak{g}_3$ 的一个不可約表示 ρ,其首权为 j.

証. 我們可以驗証

$$[\rho(H), \rho(E_1)] = \rho(E_1),$$
$$[\rho(H), \rho(E_{-1})] = -\rho(E_{-1}),$$

$$[\rho(E_1), \rho(E_{-1})] = 2\rho(H).$$

由此推出 ρ 是 $\mathfrak{g}_3$ 的一个表示，又定理 2 中关于 V_j 不可約性的証明就証明了 ρ 的不可約性.

定理 2 和定理 3 一起解决了求 $\mathfrak{g}_3$ 的不可約表示的問題.

今后以 ρ_j 記 $\mathfrak{g}_3$ 的首权为 j 的不可約表示，以 V_j 表它的表示空間. 我們知道 ρ_j 是 $2j+1$ 級的表示.

定理 2 有下面的推論：

系理. 設 v 为 V_j 中权为 r 的向量. 如以 p 表最大非負整数使 $\rho_j(E_{-1})^p v \neq 0$，而以 q 表最大非負整数使 $\rho_j(E_1)^q v \neq 0$，則 $2r = -(q-p)$，而且 $p+q=2j$. 再者，$\rho_j(E_{-1})^i \rho_j(E_1)^q v \neq 0$ $(0 \leqslant i \leqslant p+q)$ 而 $\rho_j(E_{-1})^i \rho_j(E_1)^q v$ 是属于权 $r+q-i$ 的向量.

証. 因 $\rho_j(H)$ 的特征根都是单的，故 v 与 v_r 綫性相关，因此不妨設 $v = v_r$. 根据(1)式知，如 $\rho_j(E_1)^i v_r \neq 0$，則 $\rho_j(E_1)^i v_r$ 属于权 $r+i$，因而与 v_{r+i} 綫性相关. 于是由 $\rho_j(E_1)\rho_j(E_1)^q v_r = 0$ 推出 $r+q=j$. 同理由 $r-p=-j$，将 $r+q=j$ 与 $r-p=-j$ 相加得 $2r=-(q-p)$，相減得 $p+q=2j$.

下面的定理将寻求 $\mathfrak{g}_3$ 的可約表示的問題化归寻求不可約表示的問題，这样和定理 2 及定理 3 一起，就解决了寻求 $\mathfrak{g}_3$ 的一切表示的問題.

定理 4. $\mathfrak{g}_3$ 的任一表示皆完全可約.

証. 我們引进 $\mathfrak{g}_3$ 的表示 ρ 的 Casimir 算子：

$$\rho(G) = -\frac{1}{2}(\rho(M_1)^2 + \rho(M_2)^2 + \rho(M_3)^2) =$$

$$= \frac{1}{4}(\rho(E_1)\rho(E_{-1}) + \rho(E_{-1})\rho(E_1)) + \frac{1}{2}\rho(H)^2.$$

易証 $\rho(G)$ 与 $\rho(\mathfrak{g}_3)$ 中每个綫性变換皆交換，例如

$$2[\rho(G), \rho(M_1)] = -[\rho(M_2)^2, \rho(M_1)] - [\rho(M_3)^2, \rho(M_1)] =$$

$$= -\rho(M_2)[\rho(M_2), \rho(M_1)] - [\rho(M_2), \rho(M_1)]\rho(M_2) -$$

$$- \rho(M_3)[\rho(M_3), \rho(M_1)] - [\rho(M_3), \rho(M_1)]\rho(M_3) =$$
$$= \rho(M_2)\rho(M_3) + \rho(M_3)\rho(M_2) - \rho(M_3)\rho(M_2) -$$
$$- \rho(M_2)\rho(M_3) = 0.$$

因此，如果 ρ 是不可約表示，則根据 Schur 引理，$\rho(G)$ 是恆同变換的倍数．特别，如 ρ_j 是首权为 j 的不可約表示，则

$$\rho_j(G) = \frac{1}{2} j(j+1)I.$$

实际上，

$$\rho_j(G)v_m = \left\{\frac{1}{4}(\rho_j(E_1)\rho_j(E_{-1}) + \rho_j(E_{-1})\rho_j(E_1)) + \frac{1}{2}\rho_j(H)^2\right\} v_m =$$
$$= \frac{1}{4}\rho_j(E_1)v_{m-1} +$$
$$+ \frac{1}{4}\rho_j(E_{-1})(j-m)(j+m+1)v_{m+1} + \frac{1}{2}m^2 v_m =$$
$$= \frac{1}{4}(j-m+1)(j+m)v_m +$$
$$+ \frac{1}{4}(j-m)(j+m+1)v_m + \frac{1}{2}m^2 v_m =$$
$$= \frac{1}{2}j(j+1)v_m, \quad (m = j, j-1, \cdots, -j).$$

有了上面这些准备之后，我們可以証明定理 4 的一个特殊情形．

引理 4. 如 $\mathfrak{g}_3$ 的一个表示 ρ 恰包含两个不可約表示，即 ρ 的表示空間 V 包有一个不可約的不变子空間 V_0 而商空間 V/V_0 仍不可約，則 V 有不变子空間 V' 存在，使 V 分解成 V_0 和 V' 的直和：$V = V_0 \dotplus V'$．

証． 設 ρ 包有两个不可約表示 ρ_j 和 $\rho_{j'}$．可在 V 中选取一組基，使 $\rho(\mathfrak{g}_3)$ 中矩陣皆有形状：

$$\rho(X) = \begin{pmatrix} \rho_j(X) & B(X) \\ 0 & \rho_{j'}(X) \end{pmatrix}, \quad X \in \mathfrak{g}_3.$$

分别考察 $j \neq j'$ 和 $j = j'$ 两种情形:

1) $j \neq j'$,这时 $\frac{1}{2}j(j+1) \neq \frac{1}{2}j'(j'+1)$,而

$$\rho(G) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}j(j+1)I & K \\ 0 & \frac{1}{2}j'(j'+1)I \end{pmatrix}.$$

用矩陣

$$P = \begin{pmatrix} I & \left(\frac{1}{2}j(j+1) - \frac{1}{2}j'(j'+1)\right)^{-1} K \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

来变换 $\rho(G)$ 和 $\rho(\mathfrak{g}_3)$ 中所有矩陣. 变换 $\rho(G)$ 的結果是

$$P\rho(G)P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}j(j+1)I & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}j'(j'+1)I \end{pmatrix},$$

而 $\rho(\mathfrak{g}_3)$ 中所有矩陣經 P 变换后要与 $P\rho(G)P^{-1}$ 交換,因此

$$P\rho(X)P^{-1} = \begin{pmatrix} \rho_j(X) & 0 \\ 0 & \rho_{j'}(X) \end{pmatrix}, \quad X \in \mathfrak{g}_3.$$

这就証明了引理 4 在 $j \neq j'$ 时成立.

2) $j = j'$. 这时 ρ_j 和 $\rho_{j'}$ 等价. V 包有一个不可約不变子空間 V_j,它的基向量 $v_j, v_{j-1}, \cdots, v_{-j}$,按公式(1)变換. 此外,$V$ 还包有一組向量 $v'_j, v'_{j-1}, \cdots, v'_{-j}$, 它們 mod V_j 之后也按公式(1)变換,即 $v'_j, v'_{j-1}, \cdots, v'_{-j}$ (mod V_j) 构成 V/V_j 的一組基,这組基也按公式(1)变換. 我們先选取 v'_j 使

$$\rho(H)v'_j = jv'_j + \mu v_j,$$

然后按下式来定义 $v'_{j-1}, \cdots, v'_{-j}$:

$$\rho(E_{-1})v'_m = v'_{m-1}, \quad (m = j, j-1, \cdots, -j+1).$$

这样一来,我們有

$$\begin{aligned}\rho(H)v'_{j-1} &= \rho(H)\rho(E_{-1})v'_j = \\ &= \rho([H,\ E_{-1}])v'_j + \rho(E_{-1})\rho(H)v'_j = \\ &= -\rho(E_{-1})v'_j + \rho(E_{-1})(jv'_j + \mu v_j) = \\ &= (j-1)v'_{j-1} + \mu v_{j-1},\end{aligned}$$

$$\rho(E_1)v'_j = 0$$

(因 $\rho(E_1)v'_j$ 属于 $\rho(H)$ 的特征值 $j+1$) 以及

$$\begin{aligned}\rho(E_1)v'_{j-1} &= \rho(E_1)\rho(E_{-1})v'_j = \\ &= \rho(2H)v'_j + \rho(E_{-1})\rho(E_1)v_j = \\ &= 2jv'_j + 2\mu v_j.\end{aligned}$$

一般地,我們有

$$\rho(H)v'_m = mv'_m + \mu v_m,$$

$$\rho(E_1)v'_m = (j-m)(j+m+1)v'_{m+1} + 2\mu(j-m)v_{m+1}.$$

实际上,設上式对 m 成立,則

$$\begin{aligned}\rho(H)v'_{m-1} &= \rho(H)\rho(E_{-1})v'_m = \\ &= \rho([H,\ E_{-1}])v'_m + \rho(E_{-1})\rho(H)v'_m = \\ &= -\rho(E_{-1})v'_m + \rho(E_{-1})(mv'_m + \mu v_m) = \\ &= (m-1)v'_{m-1} + \mu v_{m-1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\rho(E_1)v'_{m-1} &= \rho(E_1)\rho(E_{-1})v'_m = \\ &= \rho(2H)v'_m + \rho(E_{-1})\rho(E_1)v'_m = \\ &= 2mv'_m + 2\mu v_m + \rho(E_{-1}) \times \\ &\quad \times \{(j-m)(j+m+1)v'_{m+1} + 2\mu(j-m)v_{m+1}\} = \\ &= 2mv'_m + 2\mu v_m + (j-m)(j+m+1)v'_m + \\ &\quad + 2\mu(j-m)v_m = \\ &= (j-m+1)(j+m)v'_m + 2\mu(j-m+1)v_m.\end{aligned}$$

当 $m=-j-1$ 时, $v'_{-j-1}=0$, 这是因为 v'_{-j-1} 属于 $\rho(H)$ 的特征根 $-j-1$,而 $-j-1$ 不是 $\rho(H)$ 的特征根. 于是由

$$\rho(E_1)v'_{-j-1} = 0$$

得

$$2\mu(j-(-j-1)) = 0.$$

从而

$$\mu = 0.$$

这样一来,

$$\rho(H)v'_m = mv'_m,$$
$$\rho(E_{-1})v'_m = v'_{m-1}, \qquad (m = j, j-1, \cdots, -j)$$
$$\rho(E_1)v'_m = (j-m)(j+m+1)v'_{m+1}.$$

这就証明了 $v'_{-j}, v'_{-j+1}, \cdots, v'_j$ 构成 V 的不可約不变子空間 V'_j，而 $V = V_j \dotplus V'_j$.

引理 4 証完.

現在我們再指出,如何从引理 4 导出定理 4. 实际上,設 ρ 是 $\mathfrak{g}_3$ 的一个表示,表示空間为 V. 再設 V_0 是 ρ 的一个不可約不变子空間. 假定定理 4 对于維数較 V 的維数为低的表示空間成立，那么

$$V/V_0 = \bar{V}_1 \dotplus \bar{V}_2 \dotplus \cdots \dotplus \bar{V}_m,$$

其中 $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \cdots, \bar{V}_m$ 都是 V/V_0 的不可約不变子空間. 以 U_i 表 V 中向量在自然同态

$$V \to V/V_0$$

之下映到 $\bar{V}_i$ 去的那些向量所构成的子空間,则

$$U_i/V_0 = \bar{V}_i.$$

于是根据引理 4, U_i 有不可約不变子空間 V_i 使

$$U_i = V_0 \dotplus V_i.$$

那么

$$V = V_0 \dotplus V_1 \dotplus \cdots \dotplus V_m.$$

这就証明了 ρ 是完全可約的.

基于定理 4,定理 2 的系理可作如下的推广.

引理 5. 設 ρ 是 $\mathfrak{g}_3$ 的一个表示,则 ρ 的权都是整数或半整数. 設 v 是 ρ 的表示空間 V 中属于权 r 的一个向量. 如以 p 表最大非負整数使 $\rho(E_{-1})^p v \neq 0$,而以 q 表最大非負整数使 $\rho(E_1)^q v \neq 0$,则 $2r = -(q-p)$. 再者, $\rho(E_{-1})^i\rho(E_1)^q v \neq 0 (0 \leqslant i \leqslant p+q)$ 而 $\rho(E_{-1})^i\rho(E_1)^q$ 属于权 $r+q-i$.

証. 根据定理 4，ρ 可分解成一些不可約表示的和. 又根据定理 2，其中每一个都和某一个 ρ_j 等价. 相应地 V 就分解成一些不可約不变子空間的直和，其中每一个都可看作某一个 V_j. 設在 V 的这个直和分解下，v 有以下的分解

$$v=\sum_i v_i,$$

而 v_i 属于一个首权为 $j(i)$ 的不可約不变子空間. 显然，每个 v_i 都与 v 有相同的权 r. 由此即推出 r 为整数或半整数.

其次，对所有的 i，我們有 $\rho(E_1)^{q+1}v_i=0$；对至少一个 i，有 $\rho(E_1)^q v_i\neq 0$. 如 $\rho(E_1)^q v_i\neq 0$，設 p' 为最大非負整数使 $\rho(E_{-1})^{p'}v_i\neq 0$，則根据定理 2 之系理有 $2r=-(q-p')$，于是 $p'=2r+q$. 如 $\rho(E_1)^q v_k=0$. 設 p'' 为最大非負整数使 $\rho(E_{-1})^{p''}v_k\neq 0$，而 q'' 为最大非負整数使 $\rho(E_1)^{q''}v_k\neq 0$，則根据定理 2 之系理有 $2r=-(q''-p'')$，于是 $p''=2r+q''$；但 $q''<q$，故 $p''<p'$. 因此，对使得 $\rho(E_1)^q v_i\neq 0$ 的标号 i，$\rho(E_{-1})^p v_i\neq 0$. 于是由定理 2 的系理推出 $2r=-(q-p)$.

第十章　半单李代数的表示

§1. 半单李代数的不可約表示

設 $\mathfrak{g}$ 是半单李代数，$\mathfrak{h}$ 是它的一个固定的 Cartan 子代数. 設 ρ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示，表示空間为 V. 定义在 $\mathfrak{h}$ 上的一个綫性函数 $\omega=\omega(H)$ 称为表示 ρ 的一个**权**，如果有 V 中非 0 向量 x 存在，使

$$\rho(H)x=\omega(H)x,\quad 对一切\ H\in\mathfrak{h}$$

而 x 称为相应于权 ω 的一个**权向量**. ρ 的两个权 ω_1 和 ω_2 称为等价，如有 $S\in W$（$\mathfrak{g}$ 的 Weyl 羣），使 $S(\omega_1)=\omega_2$.

易見，半单李代数的根即是它附属表示的权.

設 ω 是定义在 $\mathfrak{h}$ 上的一个綫性函数，定义

$$V_\omega=\{x\in V\ 使\ \rho(H)x=\omega(H)x,\ 对一切\ H\in\mathfrak{h}\},$$

即 V_ω 由一切相应于权 ω 的权向量組成，则 V_ω 是 V 的子空间，自然它属于权 ω 的权子空間，即

$$V_\omega\subseteq V^\omega=V^\omega_{\rho(\mathfrak{h})},$$

而且 ω 是权当且仅当 $V_\omega\neq(0)$. 定义 ω 的重数为 $\dim V^\omega$.

E. Cartan[1] 曾逐一地研究了单李代数的表示，但他的許多討論对于一般的半单李代数也成立.

定理 1. 設 ρ 是半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个不可約表示，表示空間是 V，$\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数，而 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一組基础根系（相对于 $\mathfrak{h}$ 而言的）. 于是

1° V 可分解成权子空間 V_ω 的直和，即 $V=\sum_\omega{}^{\cdot}V_\omega$. 因此

---

1) 見 E. Cartan, Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, *Bull. Soc. Math. France*, **41** (1913), 53—96.

$V_\omega = V^\omega$。

2° 如果 ω 是 ρ 的权而 α 是一个根，则 $\frac{2(\omega,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ 是整数，而且

$$\omega - \frac{2(\omega,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$$

也是 ρ 的权，并且它与 ω 有相同的重数。因此等价的权也有相同的重数。

3° 存在唯一的一个权 ω_0（自然依赖于基础根系 Π 的选取），称为首权，使得 ρ 的权皆有形状：

$$\omega_0 - \alpha_{i_1} - \alpha_{i_2} - \cdots - \alpha_{i_k}, \quad \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_k} \in \Pi,$$

并且 ω_0 是单权。

証。 証明分以下几步进行。

1）先証明 ρ 至少有一个权。

因 $\mathfrak{h}$ 是交换子代数，故 $\rho(\mathfrak{h})$ 是交换綫性代数，因而是可解綫性代数。于是根据 Lie 定理，ρ 一定有一个权。

2）再証明下述引理。

引理 1. 設 ω 是 ρ 的一个权，x 是相应的权向量。再設 $\alpha \in \Sigma$，Σ 是 $\mathfrak{g}$ 的根系。如果 $\rho(E_\alpha)x \neq 0$，则 $\omega+\alpha$ 也是 ρ 的一个权而 $\rho(E_\alpha)x$ 是相应的权向量。如果 $\omega+\alpha$ 不是权，则 $\rho(E_\alpha)x = 0$。

証。 实际上，

$$\begin{aligned}\rho(H)\rho(E_\alpha)x &= \rho([H, E_\alpha])x + \rho(E_\alpha)\rho(H)x = \\ &= \rho(\alpha(H)E_\alpha)x + \rho(E_\alpha)\omega(H)x = \\ &= (\omega+\alpha)(H)\rho(E_\alpha)x.\end{aligned}$$

由此即可推出引理 1。

注意到第二章定理 3，引理 1 可推广如下：

引理 1′. 設 $\mathfrak{g}$ 是半单李代数，$\mathfrak{h}$ 是它的一个 Cartan 子代数，Σ 是 $\mathfrak{g}$ 的根系，$\alpha \in \Sigma$ 而 E_α 是相应于根 α 的一个根向量。再設 ρ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示，表示空間为 V，而 V_1 是 V 的一个子空間，它在 $\rho(\mathfrak{h})$ 及 $\rho(E_\alpha)$ 的作用下不变。再設 ω 是 ρ 的一个权并設有

$x \in V$, $x \notin V_1$ 存在,有性質

$$\rho(H)x \equiv \omega(H)x \pmod{V_1}, \quad 对一切\ H \in \mathfrak{h}.$$

那么如果 $\rho(E_\alpha)x \notin V_1$,則 $\omega+\alpha$ 也是 ρ 的一个权,而

$$\rho(H)\rho(E_\alpha)x \equiv (\omega+\alpha)(H)\rho(E_\alpha)x \pmod{V_1}, \ 对一切\ H \in \mathfrak{h};$$

如果 $\omega+\alpha$ 不是权,則 $\rho(E_\alpha)x \in V_1$.

3) V 由权向量生成,換言之,V 有一組基使 $\rho(H)$ $(H \in \mathfrak{h})$ 同时呈对角形.

設 ω 是 ρ 的一个权,以 x 表相应于 ω 的一个权向量. 考虑形为

$$\rho(E_{\varphi_1})\rho(E_{\varphi_2})\cdots\rho(E_{\varphi_s})x$$

的向量,其中 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_s \in \Sigma$ 而 s 为任意 $\geqslant 0$ 的整数. 如果这个向量不为 0,根据引理 1,它就是相应于权 $\omega+\varphi_1+\varphi_2+$ $+\cdots+\varphi_s$ 的权向量. 这种向量的綫性組合組成 V 的一个子空間,記作 V_1. 自然 V_1 是 ρ 的不变子空間. 因 $V_1 \neq (0)$ 而 ρ 不可約,故 $V=V_1$. 因此 V 由权向量生成.

这就証明了定理 1 中的 1°.

4) 設 ω 是 ρ 的一个权. 因 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型对 $\mathfrak{h}$ 的限制是非退化的,所以有 $H_\omega \in \mathfrak{h}$ 使

$$(H, H_\omega) = \omega(H), \quad 对一切\ H \in \mathfrak{h}$$

而且满足上述条件的 H_ω 是唯一确定的. 这样我們就将权嵌入 $\mathfrak{h}$.

5) 再証明

引理 2. 設 ρ 是半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个表示,表示空間为 V. 設 ω 是 ρ 的一个权而 $\alpha \in \Sigma$,那么

i) $\dfrac{2(\omega, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ 是整数而 $\omega - \dfrac{2(\omega, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$ 仍是 ρ 的一个权.

ii) ω 和 $\omega - \dfrac{2(\omega, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$ 在 ρ 中有相同的重数. 因此,等价的权有相同的重数.

iii) 如更設 ω 是单权,而以 p 和 q 表最大非負整数,使 $\omega+$ $+k\alpha(-p \leqslant k \leqslant q)$ 都是 ρ 的权,則

$$\frac{2(\omega, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = -(q-p)$$

而且当 $k>q$ 或 $k<-p$ 时，$\omega+k\alpha$ 都不是 ρ 的权．

証．选取根向量 E_α 和 $E_{-\alpha}$ 使 $(E_\alpha, E_{-\alpha})=1$，于是 $H_\alpha, E_\alpha, E_{-\alpha}$ 生成一个三維子代数，其結构公式为

$$[H_\alpha, E_\alpha]=(\alpha,\alpha)E_\alpha,\quad [H_\alpha, E_{-\alpha}]=-(\alpha,\alpha)E_\alpha,$$
$$[E_\alpha, E_{-\alpha}]=H_\alpha.$$

令

$$H_1=\frac{H_\alpha}{(\alpha,\alpha)},\quad E_1=\sqrt{\frac{2}{(\alpha,\alpha)}}E_\alpha,\quad E_{-1}=\sqrt{\frac{2}{(\alpha,\alpha)}}E_{-\alpha},$$

則 H_1, E_1, E_{-1} 也是这个子代数的一組基而

$$[H_1, E_1]=E_1,\quad [H_1, E_{-1}]=-E_{-1},\quad [E_1, E_{-1}]=2H_1.$$

因此，这个三維子代数就是第九章 § 3 中所討論的 $\mathfrak{g}_3$．

$\mathfrak{g}$ 的表示 ρ 自然誘导出 $\mathfrak{g}_3$ 的一个表示．設 v 是 V 中属于权 ω 的一个向量，那么根据第九章引理 5，以 p 表最大非負整数使 $\rho(E_{-1})^p v \neq 0$ 而以 q 表最大非負整数使 $\rho(E_1)^q v \neq 0$，則 $2\omega(H_1)=-(q-p)$．这証明了

$$\frac{2(\omega,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=\frac{2\omega(H_\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=2\omega(H_1)=-(q-p)$$

是整数．仍根据同一引理有 $\rho(E_{-1})^i\ \rho(E_1)^q\ v\neq 0\ (0\leqslant i\leqslant \leqslant p+q)$．又根据引理 1 可知，$\rho(E_{-1})^i\ \rho(E_1)^q v$ 是属于权 $\omega+(q-i)\alpha$ 的权向量；取 $i=p$ 得知

$$\omega-\frac{2(\omega,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha=\omega+(q-p)\alpha$$

仍是 ρ 的一个权．这証明了 i)．

現在来証明 ii)．如果 ω 不是单权，記 V_1 为由 $\rho(E_1)^q v, \cdots, \rho(E_1)v, v, \rho(E_{-1})v, \cdots, \rho(E_{-1})^p v$ 所张成的子空間．易見 V_1 在 $\rho(\mathfrak{h}), \rho(E_1), \rho(E_{-1})$ 的作用下不变．因 ω 不是 ρ 的单权，所以有 $v_1\in V$ 而 $v_1\notin V_1$，使对一切 $H\in\mathfrak{h}$，$\rho(H)v_1\equiv\omega(H)v_1 \pmod{V_1}$．

注意这时 $\mathfrak{g}$ 的表示 ρ 在商空間 V/V_1 上誘导出 $\mathfrak{g}_3$ 的一个表示. 那么仍根据第九章引理 5，以 p' 表最大非負整数使 $\rho(E_{-1})^{p'}v_1 \notin V_1$，而以 q' 表最大非負整数使 $\rho(E_1)^{q'}v_1 \notin V_1$，就有 $2\omega(H_1) = -(q'-p')$. 同样推出 $\frac{2(\omega, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = -(q'-p')$. 仍根据同一引理，有 $\rho(E_{-1})^i\rho(E_1)^{q'}v_1 \notin V_1$ $(0 \leqslant i \leqslant p'+q')$. 再根据引理 1′ 知，对一切 $H \in \mathfrak{h}$ 有

$$\rho(H)\rho(E_{-1})^i\rho(E_1)^{q'}v_1 \equiv$$
$$\equiv (\omega + (q'-i)\alpha)(H)\rho(E_{-1})^i\rho(E_1)^{q'}v_1 \pmod{V_1}.$$

取 $i = p'$ 知，$\omega + (q'-p')\alpha = \omega - \frac{2(\omega, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$ 也不是 ρ 的单权.

如此継續下去，可証得 $\omega - \frac{2(\omega, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$ 的重数不比 ω 的重数小. 但 ω 与 $\omega' = \omega - \frac{2(\omega, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$ 的地位完全对等，即 $\omega' - \frac{2(\omega', \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha = \omega$. 因此同样可証 ω 的重数不比 $\omega - \frac{2(\omega, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$ 的重数小，所以 ω 与 $\omega - \frac{2(\omega, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$ 有相同的重数. 又因

$$S_\alpha(\omega) = \omega - \frac{2(\omega, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha,$$

而 Weyl 羣由一切 $S_\alpha(\alpha \in \Sigma)$ 生成，故等价的权有相同的重数. 这証明了 ii).

最后来証明 iii). 現在設 ω 是单权. 仍設 v 是属于权 ω 的一个权向量，仍以 p 和 q 表最大非負整数分別使 $\rho(E_{-1})^p v \neq 0$，$\rho(E_1)^q v \neq 0$. 再以 p_0, q_0 表最大非負整数使 $\omega - p_0\alpha$ 和 $\omega + q_0\alpha$ 都是 ρ 的权，显然 $p_0 \geqslant p$，$q_0 \geqslant q$. 只要証明 $p = p_0$，$q = q_0$ 即可. 設 u 是 V 中属于权 $\omega + q_0\alpha$ 的一个权向量，自然有 $\rho(E_1)u = 0$. 以 s 表最大非負整数使 $\rho(E_{-1})^s u \neq 0$，那么根据第九章引理 5 有 $2(\omega + q_0\alpha)(H_1) = s$；将 $2\omega(H_1) = -(q-p)$代

入得 $-q+p+2q_0=s$. 因 $q_0\geqslant q$, 故 $s\geqslant p+q_0\geqslant q_0$, 于是 $\rho(E_{-1})^{q_0}u\neq 0$. 因 ω 是单权, 而 $\rho(E_{-1})^{q_0}u$ 是相应于权 ω 是一个权向量, 故 $\rho(E_{-1})^{q_0}u$ 与 v 綫性相关. 因 p 为最大非負整数使 $\rho(E_{-1})^p v\neq 0$ 而 s 为最大非負整数使 $\rho(E_{-1})^s u\neq 0$, 故 $s-q_0=p$. 将 $s-q_0=p$ 代入 $-q+p+2q_0=s$ 即得 $q=q_0$, 同理可証 $p=p_0$.

这样引理 2 就完全証明了. 于是定理 1 中的 2° 也就証明了.

6) 我們在此附带指出,可仿照第五章定理 3 的証明来証明下面的

引理 3. 設 ω 是半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的某一表示的一个权,则 $\omega\in\mathfrak{h}_0^*$,而 $\mathfrak{h}_0^*$ 是由根的实系数綫性組合所生成的一个实空間.

7) 最后来証明 3°.

我們知道基础根系 $\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 是 $\mathfrak{h}_0^*$ 的一組基. 我們先利用这組基在 $\mathfrak{h}_0^*$ 中引进一个偏序关系: 設 $\lambda,\ \mu\in\mathfrak{h}_0^*$,我們說 $\lambda\geqslant\mu$. 如果 $\lambda-\mu$ 可表成 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的非負系数的綫性組合; 这时我們称 λ 高于或等于 μ. 如果 $\lambda\geqslant\mu$ 而 $\lambda\neq\mu$, 我們就說 λ 高于 μ,記 $\lambda\succ\mu$. 如 $\lambda\succ 0$,我們就說 λ 是正的;如果 $\lambda\prec 0$, 我們就說 λ 是負的. 在 $\mathfrak{h}_0^*$ 中引进此偏序之后, 根系 Σ 仍分成正負各半, 仍記作 Σ_+ 和 Σ_-. 以后我們談到 $\mathfrak{h}_0^*$ 中的次序总是指的这样一个偏序关系.

对于上面引进的这个偏序来說, 設 ω_0 是 ρ 的一个最高权, 即 ρ 的其余的权都不比 ω_0 高. 設 x 是相应于 ω_0 的一个非 0 权向量. 考察形为

$$\rho(E_{-\alpha_{i_1}})\rho(E_{-\alpha_{i_2}})\cdots\rho(E_{-\alpha_{i_k}})x$$

的向量,其中 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_k}\in\Pi$ 可重复出現, 而 k 为任意 $\geqslant 0$ 的整数. 如果这个向量不为 0, 它就是相应于权

$$\omega_0-\alpha_{i_1}-\alpha_{i_2}-\cdots-\alpha_{i_k}$$

的权向量. 这种向量的綫性組合的全体組成 V 的一个子空間, 記作 V_1. 我們来証明 V_1 是 ρ 的不变子空間. 首先 V_1 在 $\rho(H)$

$(H\in\mathfrak{h})$ 及 $\rho(E_{-\alpha})(\alpha\in\Pi)$ 的作用下不变是显然的。其次，由

$$[E_\alpha, E_{-\beta}]=\delta_{\alpha\beta}H_\alpha,\quad \alpha,\beta\in\Pi$$

推出

$$\rho(E_\alpha)\rho(E_{-\beta})=\delta_{\alpha\beta}\rho(H_\alpha)+\rho(E_{-\beta})\rho(E_\alpha),$$

由此即可导出 V_1 在 $\rho(E_\alpha)$ $(\alpha\in\Pi)$ 的作用下也不变。 最后設 $\gamma\in\Sigma$。 如 γ 为負根，則 $\gamma=-(m_1\alpha_1+m_2\alpha_2+\cdots+m_n\alpha_n)$，$m_1,m_2,\cdots,m_n\geqslant 0$。 我們对 $\sum_{i=1}^n m_i$ 行归納法。 当 $\sum_{i=1}^n m_i=1$ 时，$-\gamma$ 是基础根，已知 V_1 在 $\rho(E_\gamma)$ 的作用下不变。当 $\sum_{i=1}^n m_i>1$ 时，可以写 $\gamma=\beta+(-\alpha)$，其中 α 为基础根。根据归納法假設 V_1 在 $\rho(E_\beta)$ 的作用下不变。再由

$$E_\gamma=\frac{1}{N_{\beta,-\alpha}}[E_\beta, E_{-\alpha}]$$

得

$$\rho(E_\gamma)=\frac{1}{N_{\beta,-\alpha}}\Big\{\rho(E_\beta)\rho(E_{-\alpha})-\rho(E_{-\alpha})\rho(E_\beta)\Big\}.$$

由此即可推出 V_1 在 $\rho(E_\gamma)(\gamma\prec 0)$ 的作用下不变。同理可証 V_1 在 $\rho(E_\alpha)(\alpha\succ 0)$ 的作用下也不变。因此 V_1 是 ρ 的不变子空間。又因 V_1 不可約，故 $V=V_1$。 ω_0 是单权这一点是显然的，而且从証明可見，ω_0 的确比 ρ 的其余的权都要高。 因此首权 ω_0 由基础根系 Π 唯一确定。

这样定理 1 就完全証明。

定理 2. 設 $\mathfrak{g}$ 是半单李代数，$\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数，$\Pi=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一組基础根系。 設 ρ 和 ρ' 是 $\mathfrak{g}$ 的两个不可約表示。如果 ρ 和 ρ' 相对于 Π 的首权相等，那么 ρ 和 ρ' 等价。

証. 設 x_0 和 x_0' 分别是 ρ 和 ρ' 的表示空間 V 和 V' 中相应于首权 ω_0 的权向量。在 V 中作出所有可能的向量

$$\rho(E_{-\alpha_{i_1}})\rho(E_{-\alpha_{i_2}})\cdots\rho(E_{-\alpha_{i_k}})x_0, \tag{1}$$

并相应地在 V' 中作出

$$\rho'(E_{-\alpha_{i_1}})\rho'(E_{-\alpha_{i_2}})\cdots\rho'(E_{-\alpha_{i_k}})x_0'. \qquad (2)$$

在定理 1 的証明中已知它們分别张成 V 和 V'，并且每一个这种非 0 向量有一个确定的权. 我們如下建立 V 和 V' 之間的一个同构:

$$\sum c_{i_1i_2\cdots i_k}\rho(E_{-\alpha_{i_1}})\rho(E_{-\alpha_{i_2}})\cdots\rho(E_{-\alpha_{i_k}})x_0 \to$$
$$\to \sum c_{i_1i_2\cdots i_k}\rho'(E_{-\alpha_{i_1}})\rho'(E_{-\alpha_{i_2}})\cdots\rho'(E_{-\alpha_{i_k}})x_0'.$$

要証明这是个同构，需要証明：如果在沒撇的向量(1)之間存在一个綫性关系，那么对应的有撇的向量(2)之間也存在带有同样系数的綫性关系；而且反之也成立.

假定在沒撇的向量之間有一綫性关系

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots = 0, \qquad (3)$$

則用相同系数 $c_1, c_2, \cdots$，我們能在 V' 中作一向量

$$c_1v_1' + c_2v_2' + \cdots = u'.$$

所有如此获得的向量 u' 形成 V' 的一个子空間 V_1'. 容易看出 V_1' 是 ρ' 的不变子空間. 因 ρ' 不可約，故一定有 $V_1' = 0$ 或 $V_1' = V'$. 因 $x_0' \notin V_1'$，否則(3)式左方諸向量 $v_1, v_2, \cdots$ 的权都是 ω_0，于是 $v_1 = v_2 = \cdots = x_0$. 那么由(3)式得

$$c_1 + c_2 + \cdots = 0.$$

这时也有 $v_1' = v_2' = \cdots = x_0'$，于是由(4)式得

$$x_0' = (c_1 + c_2 + \cdots)x_0' = 0.$$

矛盾. 因此一定有 $V_1' = 0$. 断言得証. 从而 ρ 和 ρ' 等价.

由定理 2 可知，半单李代数的不可約表示由它的首权唯一确定. 因此要决定半单李代数的不可約表示就需要研究 $\mathfrak{h}_0^*$ 中哪些元素可以作为不可約表示的首权.

定理 3. 設 $\mathfrak{g}$ 是半单李代数，$\mathfrak{h}$ 是它的一个 Cartan 子代数，$\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 是它的一組基础根系. 如果 ω 是 $\mathfrak{g}$ 的一个不可約表示的首权，那么

$$\omega_{\alpha_i} = \frac{2(\omega, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

都是非負整数. 反之, 設 $\omega \in \mathfrak{h}_0^*$, 如果 $\omega_{\alpha_i}(i=1, 2, \cdots, n)$ 都是非負整数,那么 $\mathfrak{g}$ 一定有一个不可约表示以 ω 为首权.

証. 此地我們只給出定理中第一部分的証明. 在后面两章里,将对于典型李代数給出第二部分的証明,而在第十三章中将对于一般的半单李代数給出第二部分的証明.

設 ω 是 $\mathfrak{h}$ 的一个不可約表示的首权. 如果对于某一 $\alpha \in \Pi$ 有

$$\omega_\alpha = \frac{2(\omega, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} < 0,$$

那么根据定理 1, $\omega - \omega_\alpha\alpha$ 也是 ρ 的权. 显然 $\omega \prec \omega - \omega_\alpha\alpha$, 这与 ω 是首权相抵触. 因此一定有 $\omega_\alpha \geqslant 0$ 对一切 $\alpha \in \Pi$.

定理 2 和定理 3 一起可以看作原则上解決了求半单李代数的一切不可約表示的問題,当然定理 3 的第二部分还有待証明.

由于一个不可約表示的首权 ω 可由 ω_α 这一組数唯一确定,故半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的以 ω 为首权的不可約表示, 可在 $\mathfrak{g}$ 的 Dynkin 图中代表基础根 α 的每个圓圈(或黑点)上标以 ω_α 的值来标記. 于是半单李代数的两个不可約表示等价当且仅当它們的图相同.

为了从另一方面来刻划不可約表示的首权所具有的定理 3 中所說的那个特征性質, 我們引进下面的定义: 仍設 $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 是半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的一組基础根系,我們說 $\mathfrak{h}^*$ 中的一个元素 μ 是整綫性函数,如果 $\frac{2(\mu, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 都是整数; 而 μ 称为支配綫性函数,如果 $\frac{2(\mu, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 都是非負实数. 自然整綫性函数与支配綫性函数都属于 $\mathfrak{h}_0^*$. 有了这些定义之后,定理 3 可改述成

定理 3′. 設 $\mathfrak{g}$ 是个半单李代数,而 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数, Π 是 $\mathfrak{g}$ 的一組基础根系. 那么 $\omega \in \mathfrak{h}^*$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个不可約表示的首权(相对于 Π 而言), 当且仅当 ω 是支配整綫性函数(也是相对于 Π 而言).

最后,我們給出支配綫性函数的一个充要条件.

引理 4. 設 $\mu\in\mathfrak{h}_0^*$，則 μ 是支配綫性函数，当且仅当 $\mu\geqslant S(\mu)$，对任意 $S\in W$。

証．对任意 $S\in W$，設 $\mu\geqslant S(\mu)$；特别有 $\mu\geqslant S_i(\mu)$，对 $i=1,2,\cdots,n$．但是

$$S_i(\mu)=\mu-\frac{2(\mu,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\alpha_i,$$

于是 $\frac{2(\mu,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\geqslant 0$.

反之，設 $\frac{2(\mu,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 都是非負实数．自然有 $\mu\geqslant S_i(\mu)$．設 $S\in W$，則 S 可表作 $S=S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_k}$，其中 $1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_k\leqslant n$．我們用归納法对 k 来証明 $\mu\geqslant S(\mu)$．写 $S=S'S_{i_k}$，$S'=S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_{k-1}}$．于是从

$$S_{i_k}(\mu)=\mu-\frac{2(\mu,\alpha_{i_k})}{(\alpha_{i_k},\alpha_{i_k})}\alpha_{i_k}$$

推出

$$S(\mu)=S'(\mu)-\frac{2(\mu,\alpha_{i_k})}{(\alpha_{i_k},\alpha_{i_k})}S'(\alpha_{i_k}).$$

如果 $S'(\alpha_{i_k})\succ 0$，則因 $\frac{2(\mu,\alpha_{i_k})}{(\alpha_{i_k},\alpha_{i_k})}\geqslant 0$，故 $S'(\mu)\geqslant S(\mu)$．由归納法假設又有 $\mu\geqslant S'(\mu)$，因此 $\mu\geqslant S(\mu)$.

以下設 $S'(\alpha_{i_k})\prec 0$．令 $\beta_k=\alpha_{i_k}$ 而 $\beta_t=S_{i_t}S_{i_{t+1}}\cdots S_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k})$，$t=1,2,\cdots,k-1$，于是 $\beta_k=\alpha_{i_k}\succ 0$ 而 $\beta_1=S'(\alpha_{i_k})\prec 0$．那么有 j 存在 $(1<j\leqslant k)$ 使 $\beta_t\succ 0$ (对 $t\geqslant j$) 而 $\beta_{j-1}\prec 0$．于是 $\beta_j\succ 0$ 而 $\beta_{j-1}=S_{i_{j-1}}(\beta_j)\prec 0$．根据第六章引理 6，一定有 $\beta_j=\alpha_{i_{j-1}}$．令 $T=S_{i_1}S_{i_2}\cdots S_{i_{j-2}}$，$T'=S_{i_j}\cdots S_{i_{k-1}}$，則 $S'=TS_{i_{j-1}}T'$，而 $\beta_j=T'(\alpha_{i_k})=\alpha_{i_{j-1}}$。由此推出 $T'S_{i_k}T'^{-1}=S_{i_{j-1}}$，即 $T'S_{i_k}=S_{i_{j-1}}T'$．于是 $S=S'S_{i_k}=$ $=TS_{i_{j-1}}T'S_{i_k}=TT'S_{i_k}^2=TT'$．这时 S 是 $k-2$ 个 S_i 之积，故根据归納法假設有 $\mu\geqslant S(\mu)$.

引理 4 有以下的推論.

推論 1. 設 $\mu \in \mathfrak{h}_0^*$, 則 μ 是支配整綫性函数, 当且仅当对任意 $\alpha \in \Sigma_+$, $\frac{2(\mu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ 都是非負整数.

証. 如果对任意 $\alpha \in \Sigma_+$, $\frac{2(\mu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ 都是非負整数,自然 μ 是支配整綫性函数.

反之,設 μ 是支配整綫性函数,那么根据定义, $\frac{2(\mu, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 都是非負整数. 于是根据引理 4,对任意 $\alpha \in \Sigma_+$,

$$\mu \geqslant S(\mu) = \mu - \frac{2(\mu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha.$$

因此 $\frac{2(\mu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ 是非負的. 还要証明对任意 $\alpha \in \Sigma_+$, $\frac{2(\mu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ 都是整数. 首先我們証明, 如 μ 是整綫性函数, 則对任意 $S \in W$, $S(\mu)$ 也是整綫性函数. 当 $S = S_i$ 时,

$$S(\mu) = S_i(\mu) = \mu - \frac{2(\mu, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}\alpha_i,$$

于是

$$\frac{2(S(\mu), \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \frac{2(\mu, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} - \frac{2(\mu, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}\frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}$$
$$(j = 1, 2, \cdots, n)$$

都是整数,故 $S(\mu)$ 是整綫性函数. 因 W 由 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ 所生成,故对任意 $S \in W$, $S(\mu)$ 是整綫性函数. 其次,对任一 $\alpha \in \Sigma_+$, 根据第六章引理 5,有 $S \in W$ 使 $S\alpha = \alpha_i$ 对某一 $i(1 \leqslant i \leqslant n)$. 于是

$$\frac{2(\mu, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = \frac{2(S(\mu), S(\alpha))}{(S(\alpha), S(\alpha))} = \frac{2(S(\mu), \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}$$

是整数.

推論 2. 設 ρ 是半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个不可約表示, 則 ρ 的权的任一等价类中都有一最高的权,即这样的权 ω,对任一 $S \in W$,有

性質 $\omega \geqslant S(\omega)$（这样的权称为支配权）.

証. 設 ω 是 ρ 的一个权. 如果 $\frac{2(\omega, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，ω 就是一个支配权. 否則，有 j 存在 $(1 \leqslant j \leqslant n)$ 使 $\frac{2(\omega, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} < 0$，于是

$$\omega \leqslant S_j\omega = \omega - \frac{2(\omega, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)}\alpha_j.$$

再考察 $S_j\omega$. 如果 $\frac{2(S_j\omega, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，則 $S_j\omega$ 就是一个支配权. 否則可得一与 $S_j\omega$ 等价的权，此权也与 ω 等价，且高于 $S_j\omega$. 如此继續下去，因与 ω 等价的权只有有限个，故最后总得一支配权.

§2. 完全可約性定理

定理 4 (H. Weyl[1]). 半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的任一表示皆完全可約.

这是 H. Weyl 的著名定理，Weyl 原来的証明要用到李羣，下面我們采用 Casimir 和 van der Waerden[2] 的代数証明.

首先我們指出，对于半单李代数 $\mathfrak{g}$，如果第九章引理 4 成立，那么可以仿照第九章 §3 中关于 $\mathfrak{g}_3$ 的表示的完全可約性的証明推出 $\mathfrak{g}$ 的表示的完全可約性. 因此問題归結为对于半单李代数 $\mathfrak{g}$ 来証明第九章引理 4.

我們把 Casimir 算子推广到任意半单李代数 $\mathfrak{g}$ 来. 設 $X_\mu, \cdots$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一組基，令

$$g_{\lambda\mu} = \mathrm{Tr}\ \mathrm{ad}\,X_\lambda \mathrm{ad}\,X_\mu.$$

---

1) 見第五章 79 页所引文献.

2) 見 H. Casimir 和 B. L. van der Waerden, *Math. Ann.*, **111** (1935), 1—12.

由 Cartan 关于李代数半单性的判断标准知，矩陣

$$(g_{\lambda\mu})$$

是非退化对称矩陣。令

$$(g^{\lambda\mu}) = (g_{\lambda\mu})^{-1}.$$

如果 ρ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示，命

$$\rho(G) = \sum_{\lambda,\mu} g^{\lambda\mu}\rho(X_\lambda)\rho(X_\mu),$$

我們把 $\rho(G)$ 称为表示 ρ 的 Casimir 算子。可以証明，$\rho(G)$ 与 $\rho(\mathfrak{g})$ 中任一元皆交換。实际上，

$$[\rho(G), \rho(X_\nu)] = \sum_{\lambda,\mu} g^{\lambda\mu}[\rho(X_\lambda)\rho(X_\mu), \rho(X_\nu)] =$$

$$= \sum_{\lambda,\mu} g^{\lambda\mu}\{\rho(X_\lambda)[\rho(X_\mu), \rho(X_\nu)] + [\rho(X_\lambda), \rho(X_\nu)]\rho(X_\mu)\}.$$

如令

$$[X_\lambda, X_\mu] = \sum_\nu c^\nu_{\lambda\mu} X_\nu,$$

那么

$$[\rho(G), \rho(X_\nu)] = \sum_{\lambda,\mu} g^{\lambda\mu}\Big\{\rho(X_\lambda)\sum_\tau c^\tau_{\mu\nu}\rho(X_\tau) +$$

$$+ \sum_\tau c^\tau_{\lambda\nu}\,\rho(X_\tau)\rho(X_\mu)\Big\} =$$

$$= \sum_{\lambda,\mu,\tau} \rho(X_\lambda)\rho(X_\tau)\{g^{\lambda\mu}c^\tau_{\mu\nu} + g^{\mu\tau}c^\lambda_{\mu\nu}\}.$$

如能証明 $\left(\sum_\mu g^{\lambda\mu}c^\tau_{\mu\nu}\right)_{\lambda,\tau}$ 是斜对称矩陣，即可推出 $[\rho(G)$ $\rho(X_\nu)] = 0$。注意 $g_{\tau\sigma} = \sum_{\alpha,\beta} c^\beta_{\tau\alpha}c^\alpha_{\sigma\beta}$，于是

$$\sum_{\lambda,\tau}\left(g_{\rho\lambda}\sum_\mu g^{\lambda\mu}c^\tau_{\mu\nu}g_{\tau\sigma}\right) = \sum_{\mu,\tau}\delta^\mu_\rho c^\tau_{\mu\nu}g_{\tau\sigma}$$

$$= \sum_\tau c^\tau_{\rho\nu}g_{\tau\sigma} = \sum_{\tau,\alpha,\beta} c^\tau_{\rho\nu}c^\beta_{\tau\alpha}c^\alpha_{\sigma\beta} =$$

$$= -\sum_{\tau,\alpha,\beta} c^{\tau}_{\nu\alpha}c^{\beta}_{\tau\rho}c^{\alpha}_{\sigma\beta} - \sum_{\tau,\alpha,\beta} c^{\tau}_{\alpha\rho}c^{\beta}_{\tau\nu}c^{\alpha}_{\sigma\beta} =$$

$$= \sum_{\tau,\alpha,\beta} c^{\tau}_{\nu\alpha}c^{\beta}_{\rho\tau}c^{\alpha}_{\sigma\beta} + \sum_{\tau,\alpha,\beta} c^{\tau}_{\alpha\rho}c^{\beta}_{\tau\nu}c^{\alpha}_{\beta\sigma}.$$

这表明 $\sum_{\tau} c^{\tau}_{\rho\nu}g_{\tau\sigma}$ 在 ν, ρ, σ 的輪換 (ν, ρ, σ) 之下是不变的. 又因 $\sum_{\tau} c^{\tau}_{\rho\nu}g_{\tau\sigma}$ 对于 ρ, ν 是斜对称的, 故它对于 ρ, σ 亦然. 这証明了矩陣

$$(g_{\rho\lambda})\left(\sum_{\mu} g^{\lambda\mu}c^{\tau}_{\mu\nu}\right)(g_{\tau\sigma})$$

是斜对称的,因此矩陣 $\left(\sum_{\mu} g^{\lambda\mu}c^{\tau}_{\mu\nu}\right)_{\lambda,\tau}$ 也是斜对称的. 这就証明了我們要証的事实.

从 $\rho(G)$ 和 $\rho(\mathfrak{g})$ 中任一綫性变换皆可换推出,如 ρ 是 $\mathfrak{g}$ 的不可約表示,則 $\rho(G)$ 是恆同变换的倍数,但需注意,对于不等价的不可約表示, $\rho(G)$ 的特征值可能相同, 这是和 $\mathfrak{g}_3$ 不同之处. 例如,对于 $A_n(n \geq 2)$,对任意 $X \in A_n$, 令

$$\rho_1:\ X \to X,$$
$$\rho_2:\ X \to -X',$$

則 ρ_1 和 ρ_2 是 A_n 的两个不可約表示,它們的首权分别是 λ_1 和 $-\lambda_{n+1}$,因而是不等价的. 但是

$$\rho_1(G) = \sum_{\lambda,\mu} g^{\lambda\mu}\rho_1(X_\lambda)\rho_1(X_\mu) = \sum_{\lambda,\mu} g^{\lambda\mu}X_\lambda X_\mu,$$

$$\rho_2(G) = \sum_{\lambda,\mu} g^{\lambda\mu}\rho_2(X_\lambda)\rho_2(X_\mu) = \sum_{\lambda,\mu} g^{\lambda\mu}(-X'_\lambda)(-X'_\mu) =$$

$$= \sum_{\lambda,\mu} g^{\lambda\mu}(X_\mu X_\lambda)' = \sum_{\lambda,\mu} g^{\lambda\mu}(X_\lambda X_\mu)',$$

因 $(g^{\lambda\mu})$ 是对称矩陣. 可是 $\rho_1(G)$ 和 $\rho_2(G)$ 都是单位矩陣的倍数,而

$$\rho_1(G)' = \rho_2(G),$$

故

$$\rho_1(G) = \rho_2(G).$$

我們先利用引理2的証明导出下面的

引理5. 設 $\mathfrak{g}$ 是半单李代数，ρ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示．表示空間为 V．設 V_1 是 V 的一个子空間，它在 $\rho(\mathfrak{h})$，$\rho(E_\alpha)$，$\rho(E_{-\alpha})$ 的作用下不变，其中 $E_{\pm\alpha}$ 是相应于根 $\pm\alpha$ 的根向量而 $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha$．設 ω 是 ρ 在商空間 V/V_1 中的一个权，而 $\omega+\alpha$ 不是 ρ 在 V/V_1 中的权，卽有 $e_0 \in V$ 而 $e_0 \notin V_1$ 使

$$\rho(H)e_0 \equiv \omega(H)e_0 \pmod{V_1}, \quad 对一切\ H \in \mathfrak{h},$$

而沒有 $v \in V$ 且 $v \notin V_1$ 具性質

$$\rho(H)v \equiv (\omega+\alpha)(H)v \pmod{V_1}, \quad 对一切\ H \in \mathfrak{h}.$$

置

$$e_{-1} = \rho(E_{-\alpha})e_0, \cdots, e_{-i} = \rho(E_{-\alpha})^i e_0, \cdots,$$

并設 p 是第一个非負整数使

$$e_{-p} \not\equiv 0 \pmod{V_1} \quad 而 \quad e_{-p-1} = \rho(E_{-\alpha})e_{-p} \equiv 0 \pmod{V_1}.$$

于是

$$p = \frac{2(\omega, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}.$$

同时还有

$$\rho(H)e_{-i} \equiv (\omega - i\alpha)(H)e_{-i} \pmod{V_1}, \tag{1}$$

$$\rho(E_\alpha)e_{-i} \equiv \frac{i(p-i+1)}{2}(\alpha, \alpha)e_{-i+1} \pmod{V_1}, \tag{2}$$

其中置 $e_1 = 0$.

証． 唯一需要証明的是(2)式．我們用归納法来驗証它．因 $\omega+\alpha$ 不是 V/V_1 中的权，故(2)式对 $i=0$ 成立． 設(2)式对于 $k \geqslant 0$ 成立，卽

$$\rho(E_\alpha)e_{-k} \equiv \frac{k(p-k+1)}{2}(\alpha, \alpha)e_{-k+1} \pmod{V_1},$$

那么

$$\rho(E_\alpha)e_{-(k+1)} \equiv \rho(E_\alpha)\rho(E_{-\alpha})e_{-k} \equiv$$
$$\equiv \rho([E_\alpha, E_{-\alpha}])e_{-k} + \rho(E_{-\alpha})\rho(E_\alpha)e_{-k} \equiv$$
$$\equiv \rho(H_\alpha)e_{-k} + \rho(E_{-\alpha})\frac{k(p-k+1)}{2}(\alpha, \alpha)e_{-k+1} \equiv$$
$$\equiv (\omega - k\alpha, \alpha)e_{-k} + \frac{k(p-k+1)}{2}(\alpha, \alpha)e_{-k} \equiv$$
$$\equiv \frac{(k+1)(p-k)}{2}(\alpha, \alpha)e_{-k} \pmod{V_1},$$

即(2)式对 $k+1$ 也成立.

現在假定在 $\mathfrak{h}_0^*$ 中利用 $\mathfrak{g}$ 的一个基础根系 $\Pi=\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 引进一个偏序. 相对于这个偏序,設 ω 是表示 ρ 的一个最高权,即 ρ 不再有比 ω 还高的权. 設 $\alpha \in \Sigma_+$. 这时,自然 $\omega+\alpha$ 不是权. 那么根据引理5,可得一串权向量 $e_0, e_{-1}, \cdots, e_{-p}$,其中

$$e_{-i} = \rho(E_{-\alpha})^i e_0, \quad e_{-p} \neq 0, \quad e_{-p-1} = 0,$$

而它們分别相应于权 $\omega, \omega-\alpha, \cdots, \omega-p\alpha$,同时还有

$$p = \frac{2(\omega, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$$

及

$$\rho(E_\alpha)e_{-i} = \frac{i(p-i+1)}{2}(\alpha, \alpha)e_{-i+1} \quad (i=0, 1, \cdots, p),$$

其中置 $e_1 = 0$. 这时表示空間 mod $\{e_0, e_{-1}, \cdots, e_{-p}\}$ 之后,仍有一最高权 ω'. 設 e_0' 为相应于 ω' 的向量,即

$$\rho(H)e_0' \equiv \omega'(H)e_0' \pmod{\{e_0, e_{-1}, \cdots, e_{-p}\}}.$$

从 e_0' 出发又得一串向量 $e_0', e_{-1}', \cdots, e_{-p'}'$,其中

$$e_{-i}' = \rho(E_{-\alpha})^i e_0', \quad e_{-p'}' \not\equiv 0,$$
$$e_{-p'-1}' \equiv 0 \pmod{\{e_0, e_{-1}, \cdots, e_{-p}\}}.$$

同样有

$$p' = \frac{2(\omega', \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$$

以及

$$\rho(E_\alpha)e'_{-i} \equiv \frac{i(p'-i+1)}{2}(\alpha,\alpha)e'_{-i+1}\,(\mathrm{mod}\{e_0, e_{-1}, \cdots, e_{-p}\}),$$

$$(i=0,1,\cdots,p')$$

其中置 $e'_1=0$. 如此繼續下去,可得 $e_0, e_{-1}, \cdots, e_{-p}, e'_0, e'_{-1}, \cdots, e'_{-p'}\cdots$ 张成的整个表示空間 V。

有了以上这些准备之后，我們可对一般的半单李代数 $\mathfrak{g}$ 来証明第九章引理 4. 設 $\mathfrak{g}$ 的表示 ρ 恰含有两个不可約表示 ρ_{ω_1} 和 ρ_{ω_2}, 它們分别以 ω_1 和 ω_2 为首权,我們分以下三种情形来討論:

1) 設 ρ_{ω_1} 和 ρ_{ω_2} 不等价,但其中之一的首权同时是另一个的权.

为确定起見,不仿設 ω_1 是 ρ_{ω_2} 的权. 設

$$\rho_{\omega_1}(G) = g_{\omega_1}I, \quad \rho_{\omega_2}(G) = g_{\omega_2}I,$$

其中 g_{ω_1}, g_{ω_2} 为复数. 我們可以証明 $g_{\omega_1} < g_{\omega_2}$.

选定 $\mathfrak{g}$ 的一組基,它由 $\mathfrak{h}$ 的一組基 $H_1, H_2, \cdots, H_n$ 及相应于每个根 α 的一个根向量 E_α 构成,但

$$(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1.$$

令

$$q_{ik} = \mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}H_i\mathrm{ad}H_k,$$
$$(q^{ik}) = (q_{ik})^{-1},$$

則相对于这組基,一个表示 ρ 的 Casimir 矩陣是

$$\rho(G) = \sum_{i,k} q^{ik}\rho(H_i)\rho(H_k) + \sum_\alpha \rho(E_\alpha)\rho(E_{-\alpha}).$$

以 V 和 U 分别表 ρ_{ω_1} 和 ρ_{ω_2} 的表示空間. U 中属于权 ω_1 的向量組成的子空間記作 U_{ω_1}. 我們知道 U_{ω_1} 是 $\rho_{\omega_2}(H_i)\rho_{\omega_2}(H_k)$ 和 $\rho_{\omega_2}(E_\alpha)\rho_{\omega_2}(E_{-\alpha})$ 的不变子空間. 以 r 表 U_{ω_1} 的維数,則

$$g_{\omega_2} = \frac{1}{r}\mathrm{Tr}_{U_{\omega_1}}\rho_{\omega_2}(G) =$$

$$= \frac{1}{r}\sum_{i,k} q^{ik}\,\mathrm{Tr}_{U_{\omega_1}}\rho_{\omega_2}(H_i)\rho_{\omega_2}(H_k) +$$

$$+\frac{1}{r}\sum_{\alpha}\mathrm{Tr}_{U_{\omega_1}}\rho_{\omega_2}(E_\alpha)\rho_{\omega_2}(E_{-\alpha}).$$

同样，以 V_{ω_1} 表 V 中属于权 ω_1 的向量組成的子空間．因 ω_1 是 ρ_1 的首权，故 V_{ω_1} 是一維的．于是

$$\begin{aligned}g_{\omega_1} &= \mathrm{Tr}_{V_{\omega_1}}\rho_{\omega_1}(G) = \\ &= \sum_{i,k} q^{ik}\mathrm{Tr}_{V_{\omega_1}}\rho_{\omega_1}(H_i)\rho_{\omega_1}(H_k) + \\ &\quad + \sum_{\alpha}\mathrm{Tr}_{V_{\omega_1}}\rho_{\omega_1}(E_\alpha)\rho_{\omega_1}(E_{-\alpha}).\end{aligned}$$

显然有

$$\mathrm{Tr}_{U_{\omega_1}}\rho_{\omega_2}(H_i)\rho_{\omega_2}(H_k) = r\omega_1(H_i)\omega_1(H_k).$$

因此 g_{ω_1} 和 g_{ω_2} 的表达式中第一个和式相等．为了証明 $g_{\omega_1} < g_{\omega_2}$，只需証对任一 $\alpha\in\Sigma$

$$\frac{1}{r}\mathrm{Tr}_{U_{\omega_1}}\rho_{\omega_2}(E_\alpha)\rho_{\omega_2}(E_{-\alpha}) \geqslant \mathrm{Tr}_{V_{\omega_1}}\rho_{\omega_1}(E_\alpha)\rho_{\omega_1}(E_{-\alpha}),$$

而对于至少一个 $\alpha\in\Sigma$，“$>$”成立卽可．更因 $\mathrm{Tr}\,\rho(E_{-\alpha})\rho(E_\alpha) = \mathrm{Tr}\,\rho(E_\alpha)\rho(E_{-\alpha})$，故只要对正根考察卽可．

現在設 α 是一个正根．根据前面所述，我們可以造向量串

$$e_0,\ e_{-1},\cdots,\ e_{-p},\ e_0',\ e_{-1}',\cdots,\ e_{-p'}',\cdots, \tag{3}$$

它們张成整个空間 U．因 ρ_{ω_2} 不可約，U 可由权向量生成，因此可以选取(3)中向量为权向量．在(3)中选出权为 ω_1 的向量来，它們就张成 U_{ω_1}；設它們是 $\dot{e}_1,\dot{e}_2,\cdots,\dot{e}_r$．設 $\dot{e}_\nu$ 出現在一个长为 $p_\nu+1$ 的向量串中，且为这串中标号是 $-i_\nu$ 的向量，則

$$\rho_{\omega_2}(E_\alpha)\rho_{\omega_2}(E_{-\alpha})\dot{e}_\nu = \frac{(i_\nu+1)(p_\nu-i_\nu)}{2}(\alpha,\alpha)\dot{e}_\nu.$$

于是

$$\mathrm{Tr}_{U_{\omega_1}}\rho_{\omega_2}(E_\alpha)\rho_{\omega_2}(E_{-\alpha}) = \sum_{\nu=1}^{r}\frac{(i_\nu+1)(p_\nu-i_\nu)}{2}(\alpha,\alpha).$$

同样有

$$\mathrm{Tr}_{V_{\omega_1}}\rho_{\omega_1}(E_\alpha)\rho_{\omega_1}(E_{-\alpha})=\frac{(0+1)(p-0)}{2}(\alpha,\alpha)=$$

$$=\frac{p}{2}(\alpha,\alpha),$$

而

$$p=\frac{2(\omega_1,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}.$$

同样，在U中，如一向量串中标号为$-i_\nu$的向量e_ν的权是ω_1，則

$$p_\nu=\frac{2(\omega_1+i_\nu\alpha,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=p+2i_\nu.$$

因此

$$(i_\nu+1)(p_\nu-i_\nu)=(i_\nu+1)(p+i_\nu)\geqslant p.$$

这样

$$\mathrm{Tr}_{U_{\omega_1}}\rho_{\omega_2}(E_\alpha)\rho_{\omega_2}(E_{-\alpha})\geqslant\sum_{\nu=1}^{r}\frac{p}{2}(\alpha,\alpha)=r\frac{p}{2}(\alpha,\alpha).$$

于是我們証明了

$$\frac{1}{r}\mathrm{Tr}_{U_{\omega_1}}\rho_{\omega_2}(E_\alpha)\rho_{\omega_2}(E_{-\alpha})\geqslant\mathrm{Tr}_{V_{\omega_1}}\rho_{\omega_1}(E_\alpha)\rho_{\omega_1}(E_{-\alpha}).$$

更进一步，如上式对α有等号成立，則$i_\nu=0$ $(\nu=1,2,\cdots,r)$. 这时ρ_{ω_2}的含权ω_1的α-权串皆从ω_1开始. 但这不能对所有α都成立. 实际上，以e_0表U中属于首权ω_2的向量. 設若

$$e_1=\rho(E_{-\alpha_1})\cdots\rho(E_{-\alpha_s})e_0,\quad \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\in\Pi$$

是U中一个权为ω_1的权向量. 令$v=\rho(E_{-\alpha_2})\cdots\rho(E_{-\alpha_s})e_0$，則$e_1=\rho(E_{-\alpha_1})v$, $v\neq 0$. 注意v的权$\omega_1+\alpha_1\succ\omega_1$. 于是$e_1$就不出現在相应于含权$\omega_1$的$\alpha_1$-权串的权向量串之首. 因此至少有一$\alpha$使

$$\frac{1}{r}\mathrm{Tr}_{U_{\omega_1}}\rho_{\omega_2}(E_\alpha)\rho_{\omega_2}(E_{-\alpha})>\mathrm{Tr}_{V_{\omega_1}}\rho_{\omega_1}(E_\alpha)\rho_{\omega_1}(E_{-\alpha}).$$

这就証明了$g_{\omega_1}<g_{\omega_2}$.

既然 $g_{\omega_1} \neq g_{\omega_2}$，那么可以仿照 $\mathfrak{g}_3$ 的情形来証明 ρ 可分解为 ρ_{ω_1} 和 ρ_{ω_2} 的直和.

2）設 ρ_{ω_1} 和 ρ_{ω_2} 不等价，但任一表示的首权都不是另一表示的权.

設 V 是 ρ 的表示空間，V_{ω_1} 是 V 中按 ρ_{ω_1} 变换的不变子空間，則 V/V_{ω_1} 将按 ρ_{ω_2} 而变换. 設 e_{ω_1} 是 V_{ω_1} 中相应于首权 ω_1 的向量，設 e_{ω_2} 是 V 中相应于权 ω_2 的权向量. 根据假設，ω_2 不是 ρ_{ω_1} 的权，故 $e_{\omega_2} \notin V_{\omega_1}$.

考察一切形如

$$\rho(E_{-\alpha_1})\cdots\rho(E_{-\alpha_s})\rho(E_{\beta_1})\cdots\rho(E_{\beta_t})e_{\omega_2}$$

的向量，其中 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_t \in \Pi$，他們可以重复出現，而 s, t 是任意非負整数. 如果这样一个向量不为 0，它就是权为

$$\omega_2 - \alpha_1 - \cdots - \alpha_s + \beta_1 + \cdots + \beta_t$$

的权向量. 一切这种向量张成一个在 ρ 之下不变的子空間 V'. 如果 $V' \cap V_{\omega_1} = \{0\}$，那么 $V = V_{\omega_1} + V'$，因此引理成立. 現在証明 $V' \cap V_{\omega_1} \neq \{0\}$ 不能发生.

設 $V' \cap V_{\omega_1} \neq \{0\}$. 因 V_{ω_1} 不可約，故有 $V_{\omega_1} \subset V'$. 于是

$$e_{\omega_1} = \sum c_\nu A_\nu e_{\omega_2},$$

其中 c_ν 为复数而 A_ν 为形如 $\rho(E_{-\alpha_1})\cdots\rho(E_{-\alpha_s})\rho(E_{\beta_1})\cdots\rho(E_{\beta_t})$ 的算子. 等式右方每一項皆有一确定的权. 因相应于不同的权的向量必綫性无关 $\left(V = \sum_{\omega}^{\cdot} V^{\omega}\text{ 的推論}\right)$，故可設 $A_1 e_{\omega_2} (\neq 0)$ 是权为 ω_1 的向量. 又因 ω_1 是 ρ 的单权（因 ω_1 是 ρ_1 的首权而不是 ρ_2 的权），故

$$A_1 e_{\omega_2} = a_1 e_{\omega_1}, \quad a_1 \text{ 为 } \neq 0 \text{ 的复数.}$$

設 $A_1 = \rho(E_{-\alpha_1})\cdots\rho(E_{-\alpha_s})\rho(E_{\beta_1})\cdots\rho(E_{\beta_t})$，$\alpha_i, \beta_j \in \Pi$. 于是

$$\omega_1 = \omega_2 - \alpha_1 - \cdots - \alpha_s + \beta_1 + \cdots + \beta_t.$$

今区別 $\omega_1 > \omega_2$ 和 $\omega_2 > \omega_1$ 这两种情形.

如 $\omega_1 > \omega_2$，則 $t > 0$. 于是 e_{ω_2} 的权是 ω_2，它是 ρ_{ω_2} 的权，但

不是 ρ_{ω_1} 的权. 又 $\rho(E_{\beta_t})e_{\omega_2}$ 的权是 $\omega_2+\beta_t$. 因 $\omega_2+\beta_t>\omega_2$, 故 $\omega_2+\beta_t$ 是 ρ_{ω_1} 的权,而不是 ρ_{ω_2} 的权.

如 $\omega_1<\omega_2$, 則 $s>0$. 于是 $\rho(E_{-\alpha_2})\cdots\rho(E_{-\alpha_s})\rho(E_{\beta_1})\cdots\rho(E_{\beta_t})e_{\omega_2}$ 的权是 $\omega_1+\alpha_1$. 因 $\omega_1+\alpha_1>\omega_1$,故 $\omega_1+\alpha_1$ 是 ρ_{ω_2} 的权而不是 ρ_{ω_1} 的权. 另一方面, ω_1 又是 ρ_{ω_1} 的权而不是 ρ_{ω_2} 的权.

于是問題归結为証明下面的引理.

引理 6. 設 ρ_1 和 ρ_2 是半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的两个表示, $\alpha\in\Sigma$. 設 ω 是定义在 $\mathfrak{h}$ 上的綫性函数. 于是以下情况不能发生: ω 是 ρ_1 的权但不是 ρ_2 的权; $\omega+\alpha$ 是 ρ_2 的权但不是 ρ_1 的权.

証. 設 ω 是 ρ_1 的权,但 $\omega+\alpha$ 不是 ρ_1 的权. 这时从 ω 出发可造 ρ_1 的 α-权串

$$\omega,\ \omega-\alpha,\ \cdots,\ \omega-p\alpha,$$

而

$$p=\frac{2(\omega,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}.$$

又設 $\omega+\alpha$ 是 ρ_2 的权,但 ω 不是 ρ_2 的权. 这时从 $\omega+\alpha$ 出发造 ρ_2 的 α-权串

$$\omega+\alpha,\ \omega+2\alpha,\ \cdots,\ \omega+(q+1)\alpha,$$

而

$$-q=\frac{2(\omega+\alpha,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=2\frac{(\omega,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}+2.$$

于是 $p+q=-2$. 这是不可能的.

3) 設 ρ_{ω_1} 和 ρ_{ω_2} 等价. 这时令 $\omega_1=\omega_2=\omega$.

設 ρ 的表示空間为 V, V 有不可約不变子空間 V_1. 它包有一个权为 ω 的权向量 e_0,而它由一切向量

$$\rho(E_{-\alpha_1})\rho(E_{-\alpha_2})\cdots\rho(E_{-\alpha_s})e_0,\quad(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\in\Pi)$$

生成. V 模此子空間 V_1 之后,仍有一权为 ω 的权向量 e_0'. 可以选择 e_0' 使

$$\rho(H)e_0'=\omega(H)e_0'+\mu(H)e_0.$$

我們去証明 $\mu=0$.

設 α 是一个正根. 造向量串

$$e'_0,\ e'_{-1}=\rho(E_{-\alpha})e'_0,\ \cdots,\ e'_{-i}=\rho(E_{-\alpha})^i e'_0,\cdots.$$

設 p' 是第一个非負整数使

$$e'_{-p'}\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ V_1),\quad e'_{-p'-1}=\rho(E_{-\alpha})e'_{-p}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ V_1).$$

于是

$$p'=\frac{2(\omega,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=p.$$

利用归納法可証

$$\rho(H)e'_{-i}=(\omega-i\alpha)(H)e'_{-i}+\mu(H)e_{-i},\tag{4}$$

$$\rho(E_\alpha)e'_{-i}=\frac{i(p-i+1)}{2}(\alpha,\alpha)e'_{-i+1}+i(\mu,\alpha)e_{-i+1},\tag{5}$$

$$(i=0,1,2,\cdots,p+1)$$

其中置 $e_1=e'_1=0$.

在(4)式中取 $i=p+1$ 得

$$\rho(H)e'_{-(p+1)}=(\omega-(p+1)\alpha)(H)e'_{-(p+1)}.$$

因此 $e'_{-(p+1)}$ 是权为 $\omega-(p+1)\alpha$ 的权向量. 但 $\omega-(p+1)\alpha$ 不是 ρ 的权,故 $e'_{-(p+1)}=0$. 再在(5)式中取 $i=p+1$ 得

$$0=(p+1)(\mu,\alpha)e_p.$$

因 $e_p\neq 0$,故 $(\mu,\alpha)=0$. 又因 α 可取任意一根,故 $(\mu,\alpha)=0$ 对一切 $\alpha\in\Sigma$,于是 $\mu=0$. 这就証明了

$$\rho(H)e'_0=\omega(H)e'_0,$$

即 e'_0 也是一个权为 ω 的权向量.

考察一切形如

$$\rho(E_{-\alpha_1})\rho(E_{-\alpha_2})\cdots\rho(E_{-\alpha_s})e'_0\quad(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\in\Pi)$$

的向量. 如果它不为0,它就是相应于权 $\omega-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_s$ 的权向量. 它們生成一个子空間 V_2,易証 V_2 是 ρ 的不变子空間. 如果 $V_1\cap V_2\neq\{0\}$,則 $V_1\subset V_2$. 这时

$$e_0=\sum c_\nu A_\nu e'_0,$$

而 A_ν 皆为形状 $\rho(E_{-\alpha_1})\rho(E_{-\alpha_2})\cdots\rho(E_{-\alpha_s})$ 的算子. 因相应于不

同的权的权向量一定綫性无关，故一定有

$$e_0 = ce_0', \quad c \text{ 为 } \neq 0 \text{ 的复数},$$

矛盾. 因此一定有 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$，于是 $V = V_1 \dotplus V_2$.

这样，第九章引理 4 对于半单李代数也成立. 如同前面所説，可以象 $\mathfrak{g}_3$ 的情形一样，由此推出半单李代数的任一表示都完全可約.

§ 3. 半单李代数的基础表示

定理 5. 設 $\mathfrak{g}$ 是半单李代数，$\mathfrak{h}$ 是它的一个 Cartan 子代数，$\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 是它的一組基础根系. 設 ρ_1 和 ρ_2 是 $\mathfrak{g}$ 的两个不可約表示，它們的表示空間分别为 V_1 和 V_2，而它們的首权分别为 ω_1 和 ω_2. 于是 $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$ 含有唯一的一个不可約分量，它的首权为 $\omega_1 + \omega_2$（这个不可約分量記作 $\overline{\rho_1 \otimes \rho_2}$).

証. 設 $e_i^{(1)}, e_i^{(2)}, \cdots, e_i^{(s_i)}$ 是 V_i 的一組基，而且它們都是 ρ_i 的权向量，其中 $e_i^{(1)}$ 相关于 ρ_i 的首权 $\omega_i (i = 1, 2)$. 于是 $e_1^{(j)} \otimes e_2^{(k)}$ 就是 $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2$ 的权向量；实际上，如 $e_1^{(j)}$ 以 $\omega_1^{(j)}$ 为权，$e_2^{(k)}$ 以 $\omega_2^{(k)}$ 为权，則

$$\rho(H)(e_1^{(j)} \otimes e_2^{(k)}) = \rho_1(H) e_1^{(j)} \otimes e_2^{(k)} + e_1^{(j)} \otimes \rho_2(H) e_2^{(k)} =$$
$$= (\omega_1^{(j)}(H) + \omega_2^{(k)}(H)) \ (e_1^{(j)} \otimes e_2^{(k)}),$$

即 $e_1^{(j)} \otimes e_2^{(k)}$ 以 $\omega_1^{(j)} + \omega_2^{(k)}$ 为权. 特别 $e_1^{(1)} \otimes e_2^{(1)}$ 是 ρ 的权向量，相应于权 $\omega_1 + \omega_2$. 因 ω_i 是 ρ_i 的首权，因而是 ρ_i 的单权而且比 ρ_i 的其余的权都高 $(i = 1, 2)$，故 $\omega_1 + \omega_2$ 是 ρ 的单权，而且是 ρ 的最高权.

以 V' 表 V 中含 $e_1^{(1)} \otimes e_2^{(1)}$ 的最小不变子空間(所謂不变是指相对于 ρ 而言). 我們来証明 V' 是不可約的. 設 V' 可約，根据完全可約性定理(即定理 4)，可設

$$V' = U_1 \dotplus U_2,$$

U_1, U_2 都是非 0 不变子空間. 将 $e_1^{(1)} \otimes e_2^{(1)}$ 相对于 V' 的这个直和

分解

$$e_1^{(1)}\otimes e_2^{(1)}=v_1+v_2,\quad v_1\in U_1,\quad v_2\in U_2$$

我們有

$$\rho(H)(e_1^{(1)}\otimes e_2^{(1)})=(\omega_1+\omega_2)(H)(e_1^{(1)}\otimes e_2^{(1)}).$$

将 $e_1^{(1)}\otimes e_2^{(1)}=v_1+v_2$ 代入得

$$\rho(H)v_1+\rho(H)v_2=(\omega_1+\omega_2)(H)v_1+(\omega_1+\omega_2)(H)v_2.$$

于是

$$\rho(H)v_1=(\omega_1+\omega_2)(H)v_1,$$
$$\rho(H)v_2=(\omega_1+\omega_2)(H)v_2.$$

因 $\omega_1+\omega_2$ 是 ρ 的单权,故 $v_1=0$ 或 $v_2=0$. 又因 $e_1^{(1)}\otimes e_2^{(1)}=$ $=v_1+v_2$,故 v_1, v_2 不能同时为 0. 設 $v_2=0$,則 $e_1^{(1)}\otimes e_2^{(1)}=v_1$. 因 V' 是包有 $e_1^{(1)}\otimes e_2^{(1)}$ 的最小不变子空間, 故 $V'\subset U_1$, 于是 $V'=U_1$. 这样 $U_2=0$,矛盾. 这証明了 V' 就是 ρ 的不可約子空間. 因 $e_1^{(1)}\otimes e_2^{(1)}\in V'$, 而 $e_1^{(1)}\otimes e_2^{(1)}$ 的权是 $\omega_1+\omega_2$,故 ρ 在 V' 上誘导出的不可約表示 $\overline{\rho_1\otimes\rho_2}$ 以 $\omega_1+\omega_2$ 为首权. 这就証明了定理 5.

仍設 $\mathfrak{g}$ 是半单李代数, $\mathfrak{h}$ 是它的一个 Cartan 子代数, $\Pi=$ $=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 是它的一組基础根系. 用下式定义 $\mathfrak{h}$ 上的 n 个綫性函数 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$:

$$\frac{2(\omega_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}=\delta_{ij},\quad (i,j=1,2,\cdots,n),$$

則 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 都是支配整綫性函数. 假定有 $\mathfrak{g}$ 的不可約表示 $\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_n$ 存在,它們分别以 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n$ 为首权. 現在設 ω 是定义在 $\mathfrak{h}$ 上的一个支配整綫性函数,即

$$\frac{2(\omega,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}=r_i\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

都是非負整数. 那么,根据定理 5,

$$\underbrace{\rho_1\otimes\cdots\otimes\rho_1}_{r_1}\otimes\underbrace{\rho_2\otimes\cdots\otimes\rho_2}_{r_2}\otimes\cdots\otimes\underbrace{\rho_n\otimes\cdots\otimes\rho_n}_{r_n}$$

将含唯一的一个以 ω 为首权的不可約分量. 因此要証明定理 3 的第二部分,只須証明不可約表示 $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ 存在. $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的基础表示.

定理 6. 設半单李代数 $\mathfrak{g}$ 分解成两个半单子代数 $\mathfrak{g}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 的直和: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \dotplus \mathfrak{g}_2$. 并設 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 相应地分解成 $\mathfrak{g}_1$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}_1$ 和 $\mathfrak{g}_2$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}_2$ 的直和: $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \dotplus \mathfrak{h}_2$. 更設 $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 对于 $\mathfrak{h}$ 的一組基础根系, 其中 $\Pi_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n\}$ 是 $\mathfrak{g}_1$ 对于 $\mathfrak{h}_1$ 的一組基础根系, 而 $\Pi_2 = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m\}$ 是 $\mathfrak{g}_2$ 对于 $\mathfrak{h}_2$ 的一組基础根系. 于是

i) 如 ρ_i 是 $\mathfrak{g}_i$ 的一个不可約表示, 表示空間为 V_i, 首权为 $\omega_i (i = 1, 2)$. 命

$$\rho(X)(v_1 \otimes v_2) = \rho_1(X_1)v_1 \otimes v_2 + v_1 \otimes \rho_2(X_2)v_2$$

(如 $X = X_1 + X_2$, $X_1 \in \mathfrak{g}_1$, $X_2 \in \mathfrak{g}_2$, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$), 則 ρ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个不可約表示, 表示空間为 $V = V_1 \otimes V_2$,首权为 $\omega_1 + \omega_2$. 如对任一 $H \in \mathfrak{h}$ 定义

$$(\omega_1 + \omega_2)(H) = \omega_1(H_1) + \omega_2(H_2),$$

其中 $H = H_1 + H_2$, $H_1 \in \mathfrak{h}_1$, $H_2 \in \mathfrak{h}_2$.

ii) 反之, $\mathfrak{g}$ 的任一不可約表示皆可按照 i) 的方式获得.

証. 設 $X \in \mathfrak{g}$ 而 $X = X_1 + X_2$, $X_1 \in \mathfrak{g}_1$, $X_2 \in \mathfrak{g}_2$. 命

$$\rho_1'(X)v_1 = \rho_1(X_1)v_1, \quad v_1 \in V_1$$
$$\rho_2'(X)v_2 = \rho_2(X_2)v_2, \quad v_2 \in V_2$$

則 ρ_1', ρ_2' 显然是 $\mathfrak{g}$ 的不可約表示,表示空間分别为 V_1 和 V_2, 首权分别为 ω_1 和 ω_2. 如对任一 $H \in \mathfrak{h}$ 定义

$$\omega_1(H) = \omega_1(H_1), \quad \omega_2(H) = \omega_2(H_2),$$

其中 $H = H_1 + H_2$, $H_1 \in \mathfrak{h}_1$, $H_2 \in \mathfrak{h}_2$. 于是

$$\rho = \rho_1' \otimes \rho_2'.$$

因此要証 i),只需証 ρ 不可約即可.

設 V_i 有一組由权向量組成的基 $\{e_i^{(1)}, e_i^{(2)}, \cdots, e_i^{(s_i)}\}$ $(i =$

$=1, 2$),而 $e_i^{(k)}$ 相应于权 $\omega_i^{(k)}$ ($i=1, 2$; $k=1, 2, \cdots, s_i$),其中 $\omega_1^{(1)}=\omega_1$, $\omega_2^{(1)}=\omega_2$. 根据定理 2 的証明,可設 $e_1^{(k)}$ 皆为形状

$$\rho_1(E_{-\alpha_{i_1}})\rho_1(E_{-\alpha_{i_2}})\cdots\rho_1(E_{-\alpha_{i_s}})e_1^{(1)} \quad (s\geq 0),$$

而 $e_2^{(k)}$ 皆为形状

$$\rho_2(E_{-\beta_{k_1}})\rho_2(E_{-\beta_{k_2}})\cdots\rho_2(E_{-\beta_{k_t}})e_2^{(1)} \quad (t\geq 0),$$

其中 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_s}\in\Pi_1$, $\beta_{k_1}, \beta_{k_2}, \cdots, \beta_{k_t}\in\Pi_2$. 因此,如以 V' 表 $V=V_1\otimes V_2$ 中包有 $e_1^{(1)}\otimes e_2^{(1)}$ 的最小不变子空間,則由 ρ 之定义容易推得 V' 必包有一切 $e_1^{(j)}\otimes e_2^{(k)}$ ($j=1, 2, \cdots, s_1$; $k=1, 2, \cdots, s_2$). 于是 $V'=V$. 再根据定理 5 的証明知, V' 不可約, 因此 V 不可約. 这証明了 i).

現在設 ρ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个不可約表示, 表示空間为 V,首权为 ω. ρ 对 $\mathfrak{g}_1$ 的限制是 $\mathfrak{g}_1$ 的一个表示 ρ_1', 而 ρ 对 $\mathfrak{g}_2$ 的限制是 $\mathfrak{g}_2$ 的一个表示 ρ_2'. 因 $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2]=0$,故对一切 $X_1\in\mathfrak{g}_1$, $X_2\in\mathfrak{g}_2$,

$$\rho(X_1)\rho(X_2)=\rho(X_2)\rho(X_1); \tag{1}$$

亦即对一切 $X_1\in\mathfrak{g}_1$, $X_2\in\mathfrak{g}_2$,

$$\rho_1'(X_1)\rho_2'(X_2)=\rho_2'(X_2)\rho_1'(X_1). \tag{1'}$$

如 ρ_2' 可約,因 ρ 不可約,故由(1')式根据 Schur 引理推知 ρ_2' 一定分解成一些两两等价的不可約表示之和,即

$$\rho_2'=\underbrace{\rho_2+\rho_2+\cdots+\rho_2}_{s_1\text{个}},$$

其中 ρ_2 是 $\mathfrak{g}_2$ 的一个不可約表示, 并設它們在 ρ_2' 中出現 s_1 次. 再設 ρ_2 的級数是 s_2, 則 $\dim V=s_1s_2$. 即可选 V 的一組基使 ρ_2' 中矩陣有形状

$$\rho_2'(X_2)=\begin{pmatrix}\rho_2(X_2) & & & \\ & \rho_2(X_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \rho_2(X_2)\end{pmatrix}\ (s_1\text{个}), \quad X_2\in\mathfrak{g}_2.$$

那么,根据 Schur 引理, ρ_1' 中矩陣有形状

$$\rho_1'(X_1)=\begin{pmatrix} a_{11}(X_1)I_{s_2} & a_{12}(X_1)I_{s_2} & \cdots & a_{1s_1}(X_1)I_{s_2} \\ a_{21}(X_1)I_{s_2} & a_{22}(X_1)I_{s_2} & \cdots & a_{2s_1}(X_1)I_{s_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s_11}(X_1)I_{s_2} & a_{s_12}(X_1)I_{s_2} & \cdots & a_{s_1s_1}(X_1)I_{s_2} \end{pmatrix}, \quad X_1\in\mathfrak{g}_1.$$

記

$$\rho_1(X_1)=\begin{pmatrix} a_{11}(X_1) & a_{12}(X_1) & \cdots & a_{1s_1}(X_1) \\ a_{21}(X_1) & a_{22}(X_1) & \cdots & a_{2s_1}(X_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s_11}(X_1) & a_{s_12}(X_1) & \cdots & a_{s_1s_1}(X_1) \end{pmatrix},$$

則

$$X_1\to\rho_1(X_1)$$

是 $\mathfrak{g}_1$ 的一个表示,級数为 s_1,而

$$\rho_1'(X_1)=\rho_1(X_1)\otimes I_{s_2}.$$

于是,如 $X=X_1+X_2,\ X_1\in\mathfrak{g}_1,\ X_2\in\mathfrak{g}_2$,則

$$\rho(X)=\rho_1'(X_1)+\rho_2'(X_2)=\rho_1(X_1)\otimes I_{s_2}+I_{s_1}\otimes\rho_2(X_2).$$

又因 ρ 不可約,故 ρ_1 也一定不可約. 这就証明了 ii).

由証明的过程可見,如 ρ 的首权 ω 分解成

$$\omega=\omega_1+\omega_2,\quad \omega_1\in\mathfrak{h}_1^*,\quad \omega_2\in\mathfrak{h}_2^*,$$

則 ρ_1 是以 ω_1 为首权的不可約表示, ρ_2 是以 ω_2 为首权的不可約表示.

系理. 半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的基础表示只将 $\mathfrak{g}$ 的一个单理想一一地表出,而将其余的单理想全映成 0.

証. 因首权是 0 的不可約表示是零表示.

于是要証明定理 3 的第二部分,只要对于单李代数来証明基础表示存在就行了.

§4. 张 量 表 示

設 V 是复数域上的 N 維向量空間, r 为一正整数. 我們造 r 个 V 的 Kronecker 积

$$V^r = \underbrace{V\otimes V\otimes\cdots\otimes V}_{r\text{ 个}},$$

V^r 称为 r 阶张量空間. 設 $e_1, e_2, \cdots, e_N$ 是 V 的一組基,那么

$$e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\quad (1\leqslant i_1, i_2, \cdots, i_r\leqslant N)$$

就构成 V^r 的一組基.

現在設 $\mathfrak{g}$ 是一李代数, ρ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示,表示空間为 V. 設 $X\in\mathfrak{g}$,那么定义

$$\{\rho^r(X)\}(e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\cdots\otimes e_{i_{j-1}}\otimes\rho(X)e_{i_j}\otimes e_{i_{j+1}}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}.$$

則 ρ^r 是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示,表示空間为 V^r. 实际上,

$$\rho^r = \underbrace{\rho\otimes\rho\otimes\cdots\otimes\rho}_{r\text{ 个}}.$$

更設 $\mathfrak{g}$ 是半单李代数,而 $e_1, e_2, \cdots, e_N$ 是 ρ 的权向量,分别相应于权 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N$, 那么 $e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}$ 就是 ρ^r 的一个权向量,相应于权 $\omega_{i_1}+\omega_{i_2}+\cdots+\omega_{i_r}$. 特别,如果 ρ 不可約且 ω_1 是 ρ 的首权(自然是相对于 $\mathfrak{g}$ 的一組基础根系 Π 而言),那么 $r\omega_1$ 就是 ρ^r 的最高权而相应的权向量是 $\underbrace{e_1\otimes e_1\otimes\cdots\otimes e_1}_{r\text{ 个}}$.

于是 V^r 中含 $\underbrace{e_1\otimes e_1\otimes\cdots\otimes e_1}_{r\text{ 个}}$ 的最小的不变子空間是不可約的(根据定理 5),它給出 $\mathfrak{g}$ 的首权为 $r\omega_1$ 的不可約表示,这个不可約表示記作 $\overline{\rho^r}$.

考察 r 个文字 $1, 2, \cdots, r$ 的对称羣 S_r. 設 $p\in S_r$, 对 $v_1, v_2, \cdots, v_r\in V$ 定义

$$\varphi(p)(v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_r) = v_{p(1)}\otimes v_{p(2)}\otimes\cdots\otimes v_{p(r)},$$

于是

$$p\to\varphi(p)$$

就是 S_r 的一个表示，而表示空間为 V^r. 自然这个表示可扩充为 S_r 的羣环 R_r 的一个表示：如 $a=\sum_{p\in S_r} a_p\cdot p$, a_p 为复数，則

$$\varphi(a)=\sum_{p\in S_r} a_p\varphi(p).$$

不难証明，如果 V 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示 ρ 的表示空間，則对一切 $a\in R_r$ 及 $X\in\mathfrak{g}$,

$$\varphi(a)\{\rho^r(X)\}=\{\rho^r(X)\}\varphi(a).$$

因此对于羣环 R_r 中任意一組元素 $a_1, a_2, \cdots, a_m$，如令

$$V^r_{\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}}=\{u\in V^r \text{ 使 } \varphi(a_1)u=\cdots=\varphi(a_m)u=0\},$$

則 $V^r_{\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}}$ 是 ρ^r 的不变子空間. ρ^r 在这个不变子空間中誘导出的表示記作 $\rho^r_{\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}}$.

特别，我們取 $\{e-p\,|\,p\in S_r\}$，就得到 $V^r_{\{e-p|p\in S_r\}}$ 和 $\rho^r_{\{e-p|p\in S_r\}}$，其中 e 表 S_r 的单位元素. V^r 中向量

$$u=\sum_{i_1,\cdots,i_r=1}^{N} a_{i_1i_2\cdots i_r}e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}$$

属于 $V^r_{\{e-p|p\in S_r\}}$ 当且仅当对一切 $p\in S_r$,

$$a_{i_{p(1)}i_{p(2)}\cdots i_{p(r)}}=a_{i_1i_2\cdots i_r}.$$

因此 $V^r_{\{e-p|p\in S_r\}}$ 中的向量称为对称张量，而这个空間本身称为 r 阶对称张量空間，这个空間也記作 $V^{(r)}$，而 ρ^r 在其中誘导的表示記作 $\rho^{(r)}$. 設 $v_1, v_2, \cdots, v_r$ 是 V 中向量，則向量

$$\sum_{p\in S_r} v_{p(1)}\otimes v_{p(2)}\otimes\cdots\otimes v_{p(r)}$$

称为 $v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_r$ 的对称化. 于是向量

$$e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\quad(1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_r\leqslant N)$$

經对称化后就构成 $V^{(r)}$ 的一組基，因此 $\dim V^{(r)}=\binom{n+r-1}{r}$.

更进一步，如 ρ 是半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的不可約表示，而 $e_1, e_2, \cdots, e_N$ 是相应于权 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N$ 的权向量，其中 ω_1 为首权，那么

$$e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}$$

的对称化就是 $\rho^{(r)}$ 的一个权向量,相应于权 $\omega_{i_1}+\omega_{i_2}+\cdots+\omega_{i_r}$. 因此 $\rho^{(r)}$ 的最高权为 $r\omega_1$. 将 $\rho^{(r)}$ 的以 $r\omega_1$ 为首权的不可約分量記作 $\overline{\rho^{(r)}}$, 自然有 $\overline{\rho^r}=\overline{\rho^{(r)}}$.

其次,我們取 $\{e-\operatorname{sgn}(p)p\,|\,p\in S_r\}$,其中 $\operatorname{sgn}(p)=1$,如 p 为偶置換; $\operatorname{sgn}(p)=-1$,如 p 为奇置換,就得到 $V^r_{\{e-\operatorname{sgn}(p)p|p\in S_r\}}$ 和 $\rho^r_{\{e-\operatorname{sgn}(p)p|p\in S_r\}}$. V^r 中向量

$$u=\sum_{i_1,\cdots,i_r=1}^{N}a_{i_1i_2\cdots i_r}e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}$$

属于 $V^r_{\{e-\operatorname{sgn}(p)p|p\in S_r\}}$ 当且仅当对一切 $p\in S_r$,

$$a_{i_{p(1)}i_{p(2)}\cdots i_{p(r)}}=\operatorname{sgn}p\,a_{i_1i_2\cdots i_r}.$$

因此这个空間中的向量称为 r 阶斜对称张量,而空間本身称为 r 阶斜对称张量空間,也記此空間为 $V^{[r]}$,而 ρ^r 在其中誘导出的表示記作 $\rho^{[r]}$. 設 $v_1, v_2,\cdots,v_r\in V$,向量

$$\sum_{p\in S_r}\operatorname{sgn}(p)v_{p(1)}\otimes v_{p(2)}\otimes\cdots\otimes v_{p(r)}$$

称为 $v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_r$ 的斜对称化,記作

$$[v_1, v_2, \cdots, v_r].$$

于是向量

$$e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\quad(i_1<i_2<\cdots<i_r)$$

經斜对称化后就构成 $V^{[r]}$ 的一組基,因此 $V^{[r]}$ 的維数是 $\binom{n}{r}$. 更进一步,如 ρ 是半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的不可約表示,而 $e_1, e_2,\cdots,e_N$ 是相应于权 $\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_N$ 的权向量,那么

$$[e_{i_1}, e_{i_2},\cdots,e_{i_r}]\quad(i_1<i_2<\cdots<i_r)$$

就是 $\rho^{[r]}$ 的一个权向量,相应于权 $\omega_{i_1}+\omega_{i_2}+\cdots+\omega_{i_r}$. 如果还有

$$\omega_1\geqslant\omega_2\geqslant\cdots\geqslant\omega_N,$$

那么 $\rho^{[r]}$ 的首权是

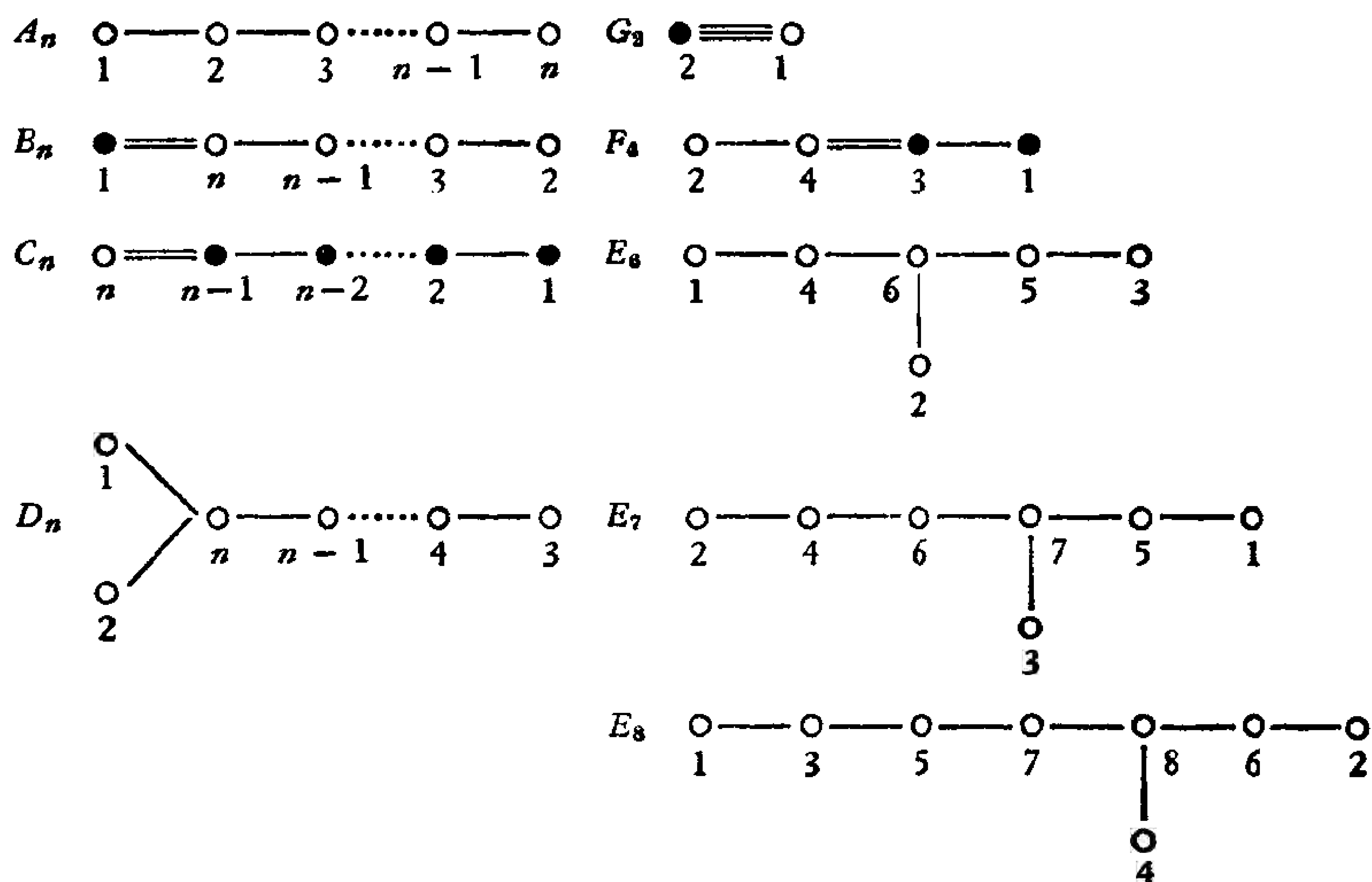
$$\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_r.$$

这时我們将 $\rho^{[r]}$ 的以 $\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_r$ 为首权的不可約分量記作 $\overline{\rho^{[r]}}$.

§5. 单李代数的初等表示

設 $\mathfrak{g}$ 是一个单李代数，$\mathfrak{h}$ 是它的一个 Cartan 子代数，$\Pi=$ $=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 相对于 $\mathfrak{h}$ 的一組基础根系. 設 ρ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个不可約表示，以 ω 为首权. 我們回忆，ρ 是一个基础表示，当且仅当在它的图中，所有附在基础根的圓圈或黑点上的数字，除一个是 1 外，其余都是 0. 因此每个基础根 α 都对应着一个基础表示 ρ_α. 在它的图中，α 上的数字是 1 而其余的根上的数字都是 0.

我們列出单代数的 Dynkin 图，并将基础根加以編号



(注意，对于含两种长度的向量的基础根系，黑点表較短者).

我們来考察一个单代数的 Dynkin 图. 图中只与另外一个点相連的点称为端点，例如 A_n 中的 1, n; E_6 中的 1, 2, 3 等. 对应于端点的不可約表示称为初等表示. A_n 的初等表示記作 ρ_1, ρ_n;

E_6 的初等表示記作 ρ_1, ρ_2, ρ_3 等.

設 β 是单代数 g 的 Dynkin 图的一个端点. 我們說 β 的分支是指的一串点(或基础根)

$$\beta_1 = \beta, \beta_2, \cdots, \beta_k$$

具有以下性質者:

1° 每个点 $\beta_i (i = 2, 3, \cdots, k-1)$ 只与 β_{i-1} 和 β_{i+1} 相連, 而不与图中其它点相連.

2° β_i 和 β_{i+1} 之間的联接只能是以下三种形式:

β_i ○——○ β_{i+1},

β_i ●——● β_{i+1},

β_i ●══○ β_{i+1},

而且如果是最后一种形式,就一定有 $i+1=k$.

3° 在点串 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ 中再增加一个点(基础根),则不可能仍具备性質 1° 和 2°. 例如, 单代数 A, B, C, D, E, F, G 有以下的分支:

$$A_n \begin{cases} 1, \quad 2, \quad \cdots \; n, \\ n, n-1, \quad \cdots \; 1, \end{cases} \qquad G_2 \begin{cases} 1, \\ 2, \end{cases}$$

$$B_n \begin{cases} 1, \quad n, \\ 2, \quad 3, \quad \cdots \; n, \end{cases} \qquad F_4 \begin{cases} 1, \; 3, \; 4, \\ 2, \; 4, \end{cases}$$

$$C_n \begin{cases} 1, \quad 2, \quad \cdots \; n, \\ n, \end{cases} \qquad E_6 \begin{cases} 1, \; 4, \; 6, \\ 2, \; 6, \\ 3, \; 5, \; 6, \end{cases}$$

$$D_n \begin{cases} 1, \; n, \\ 2, \; n, \\ 3, \; 4, \; \cdots \; n, \end{cases} \qquad E_7 \begin{cases} 1, \; 5, \; 7, \\ 2, \; 4, \; 6, \; 7, \\ 3, \; 7, \end{cases}$$

$$E_8 \begin{cases} 1, \; 3, \; 5, \; 7, \; 8, \\ 2, \; 6, \; 8, \\ 4, \; 8, \end{cases}$$

定理 7. 設 β 是单代数 $\mathfrak{g}$ 的一个端点，而

$$\beta=\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$$

是 β 的分支，則对于 $r=1, 2, \cdots, k$，有

$$\rho_{\beta_r}=\overline{\rho_{\beta_1}^{[r]}}.$$

証. 以 ω 表 ρ_{β_1} 的首权，即

$$\frac{2(\omega, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}=1,$$

$$\frac{2(\omega, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}=0,\ 对\ \alpha\in\Pi\ 而\ \alpha\neq\beta_1.$$

根据引理2，$\omega-\alpha\,(\alpha\in\Pi$ 而 $\alpha\neq\beta_1)$ 都不是 ρ_{β_1} 的权，而 $\omega-\beta_1$ 是 ρ_{β_1} 的权，$\omega-2\beta_1$ 也不是 ρ_{β_1} 的权．于是 $\omega-\beta_1$ 是 ρ_{β_1} 的第二高的权．仍根据同一引理知，ω 与 $\omega-\beta_1$ 有相同的重数，因此 $\omega-\beta_1$ 也是单权．

注意

$$\frac{2(\omega-\beta_1, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}=-1,\quad \frac{2(\omega-\beta_1, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}=1,$$

$$\frac{2(\omega-\beta_1, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}=0\quad 对\ \alpha\in\Pi\ 而\ \alpha\neq\beta_1, \beta_2.$$

根据同样道理，$\omega-\beta_1-\alpha\ (\alpha\in\Pi, \alpha\neq\beta_2)$ 都不是 ρ_{β_1} 的权，而 $\omega-\beta_1-\beta_2$ 是 ρ_{β_1} 的单权，$\omega-\beta_1-2\beta_2$ 也不是 ρ_{β_1} 的权．于是 $\omega-\beta_1-\beta_2$ 是 ρ_{β_1} 的第三高的权．

如此継續下去，我們得到 ρ_{β_1} 的一系列权：

$$\omega, \omega-\beta_1, \omega-\beta_1-\beta_2, \cdots, \omega-\beta_1-\beta_2-\cdots-\beta_k.$$

它們都是单权，其中第一个是首权，第二个是第二高的权，第三个是第三高的权等等．这样 $\overline{\rho_{\beta_1}^{[r]}}$ 的首权 ω_r 就是

$$\omega_r=\omega+(\omega-\beta_1)+\cdots+(\omega-\beta_1-\cdots-\beta_{r-1})=$$
$$=r\omega-(r-1)\beta_1-(r-2)\beta_2-\cdots-\beta_{r-1},$$
$$(1\leqslant r\leqslant k).$$

注意

$$\frac{2(\omega_r, \beta_i)}{(\beta_i, \beta_i)} = (r - i + 1) - 2(r - i) + (r - i - 1) = 0,$$

$$(i = 1, 2, \cdots, r - 2)$$

$$\frac{2(\omega_r, \beta_{r-1})}{(\beta_{r-1}, \beta_{r-1})} = 2 - 2 = 0,$$

$$\frac{2(\omega_r, \beta_r)}{(\beta_r, \beta_r)} = 1,$$

$$\frac{2(\omega_r, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = 0, \quad 如\ \alpha \in \Pi\ 而\ \alpha \neq \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r.$$

这就証明了 ω_r 也是 ρ_{β_r} 的首权．因此

$$\rho_{\beta_r} = \overline{\rho_{\beta_1}^{[r]}}, \quad (r = 1, 2, \cdots, k).$$

由定理 7 立刻推出，要証明定理 3 的第二部分，只要对于每个单代数証明初等表示存在即可．在下面两章里，我們就要对典型李代数来証明这一点．

第十一章　典型李代数的表示

§1. 李代数 A_n 的表示

和以前一样，令 $m = n + 1$. 我們知道

$$\mathfrak{h} = \left\{ H_{\lambda_1 \cdots \lambda_m} \middle| \sum_1^m \lambda_i = 0 \right\}$$

是 A_n 的一个 Cartan 子代数. A_n 相应于 $\mathfrak{h}$ 的根是

$$\lambda_i - \lambda_k, \quad i \neq k, \quad 1 \leqslant i, \quad k \leqslant m.$$

而

$$\lambda_1 - \lambda_2, \quad \lambda_2 - \lambda_3, \cdots, \lambda_n - \lambda_{n+1}$$

是一組基础根系，$\mathfrak{h}_0^*$ 可嵌在一个 $n+1$ 維欧氏空間

$$E^{n+1} = \{a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \cdots + a_{n+1}\lambda_{n+1} | a_i \text{ 实数}\}$$

之中，而

$$\mathfrak{h}_0^* = \left\{a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \cdots + a_{n+1}\lambda_{n+1} | a_i \text{ 实数}, \sum_1^{n+1} a_i = 0\right\}.$$

E^{n+1} 中有度量

$$(\lambda_1, \lambda_1) = (\lambda_2, \lambda_2) = \cdots = (\lambda_{n+1}, \lambda_{n+1}) = \frac{1}{2(n+1)},$$

$$(\lambda_p, \lambda_q) = 0 \quad (p \neq q).$$

我們回忆，E^{n+1} 中一个向量称为正的，如果它的第一个非零系数是正的，这样就在 E^{n+1} 中引进了一个次序，而这个次序在 $\mathfrak{h}_0^*$ 中誘导出一个次序，相对于这个次序的素根系即是

$$\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \cdots, \lambda_n - \lambda_{n+1}.$$

任取 $\mathfrak{h}_0^*$ 中一元素

$$\omega = a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \cdots + a_m\lambda_m, \quad \sum_1^m a_i = 0.$$

如果 ω 是 A_n 的某一表示的权，

$$\frac{2(\omega,\lambda_i-\lambda_k)}{(\lambda_i-\lambda_k,\lambda_i-\lambda_k)}=\frac{2\dfrac{(a_i-a_k)}{2(n+1)}}{\dfrac{1}{n+1}}=a_i-a_k$$

一定是整数. 因此 $a_v(1\leqslant v\leqslant m)$ 是以 $n+1$ 为分母的分数而它們彼此間差一整数. 其次，如 ω 是某一不可約表示的首权，一定有

$$\frac{2(\omega,\lambda_i-\lambda_{i+1})}{(\lambda_i-\lambda_{i+1},\lambda_i-\lambda_{i+1})}=a_i-a_{i+1}\geqslant 0,\quad (i=1,2,\cdots,n),$$

即

$$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant a_{n+1}.$$

如 ω 是基础表示 $\rho_{\lambda_1-\lambda_2}$ 的首权，就有

$$a_1-a_2=1,\quad a_2-a_3=\cdots=a_n-a_{n+1}=0.$$

由此及 $a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}=0$ 即可推出

$$a_1=\frac{n}{n+1},\ a_2=\frac{-1}{n+1},\ \cdots,\ a_{n+1}=\frac{-1}{n+1}.$$

記

$$\omega_{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{n}{n+1}\lambda_1+\frac{-1}{n+1}\lambda_2+\cdots+\frac{-1}{n+1}\lambda_{n+1}.$$

又、一般地如 ω 是基础表示 $\rho_{\lambda_i-\lambda_{i+1}}(i=1,2,\cdots,n)$ 的首权，就有

$$a_1-a_2=0,\ \cdots,\ a_{i-1}-a_i=0,\quad a_i-a_{i+1}=1,$$
$$a_{i+1}-a_{i+2}=0,\ \cdots,\ a_n-a_{n+1}=0.$$

由此及 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$ 即可推出

$$a_1=a_2=\cdots=a_i=\frac{n-i+1}{n+1},$$

$$a_{i+1}=\cdots=a_{n+1}=\frac{-i}{n+1}.$$

記

$$\omega_{\lambda_i-\lambda_{i+1}}=\frac{n-i+1}{n+1}\lambda_1+\cdots+\frac{n-i+1}{n+1}\lambda_i+$$
$$+\frac{-i}{n+1}\lambda_{i+1}+\cdots+\frac{-i}{n+1}\lambda_{n+1}.$$

特别，初等表示 $\rho_{\lambda_1-\lambda_2}$ 及 $\rho_{\lambda_n-\lambda_{n+1}}$ 的首权分别是

$$\omega_{\lambda_1-\lambda_2}=\frac{n}{n+1}\lambda_1+\frac{-1}{n+1}\lambda_2+\cdots+\frac{-1}{n+1}\lambda_{n+1},$$
$$\omega_{\lambda_n-\lambda_{n+1}}=\frac{1}{n+1}\lambda_1+\frac{1}{n+1}\lambda_2+\cdots+\frac{1}{n+1}\lambda_n+$$
$$+\frac{-n}{n+1}\lambda_{n+1}.$$

我們来定出 A_n 的初等表示。对任意 $X\in A_n$，令

$$X\to X,$$

这就得到 A_n 的一个不可約表示，首权是 $\omega_{\lambda_1-\lambda_2}$，这个初等表示 $\rho_{\lambda_1-\lambda_2}$ 簡記作 π_1。其次，对任意 $X\in A_n$，令

$$X\to -X',$$

这就得到 A_n 的另一个初等表示 $\rho_{\lambda_n-\lambda_{n+1}}$，将它簡記作 π^1。我們知道，π^1 卽是 π_1 的逆步表示，或星表示，$\pi^1=(\pi_1)^*$。

我們証明，对任意 $k=1,2,\cdots,n$，$\pi_1^{[k]}$ 和 $\pi^{1[k]}$ 都是不可約的，因此 $\overline{\pi_1^{[k]}}=\pi_1^{[k]}$，$\overline{\pi^{1[k]}}=\pi^{1[k]}$。只須証明 $\pi_1^{[k]}$ 的不可約性卽可，$\pi^{1[k]}$ 的不可約性可用类似方法得出。設 V 是 π_1 的表示空間，则 $\pi_1^{[k]}$ 的表示空間卽是 k 阶斜对称张量空間 $V^{[k]}$。我們知道 π_1 有 $n+1$ 个权：

$$\omega_1=\frac{n}{n+1}\lambda_1+\frac{-1}{n+1}\lambda_2+\cdots+\frac{-1}{n+1}\lambda_{n+1},$$
$$\omega_2=\omega_1-(\lambda_1-\lambda_2)=\frac{-1}{n+1}\lambda_1+\frac{n}{n+1}\lambda_2+\frac{-1}{n+1}\lambda_3+$$
$$+\cdots+\frac{-1}{n+1}\lambda_{n+1},$$

$$\omega_3 = \omega_2 - (\lambda_2 - \lambda_3) = \frac{-1}{n+1}\lambda_1 + \frac{-1}{n+1}\lambda_2 + \frac{n}{n+1}\lambda_3 + + \cdots + \frac{-1}{n+1}\lambda_{n+1},$$

……

$$\omega_{n+1} = \omega_n - (\lambda_n - \lambda_{n+1}) = \frac{-1}{n+1}\lambda_1 + \frac{-1}{n+1}\lambda_2 + + \cdots + \frac{-1}{n+1}\lambda_n + \frac{n}{n+1}\lambda_{n+1}.$$

因 V 是 $n+1$ 維的,所以它們都是单权,于是 $\pi_1^{[k]}$ 一共有 $\binom{n+1}{k}$ 个权

$$\omega_{i_1} + \omega_{i_2} + \cdots + \omega_{i_k} \quad (i_1 < i_2 < \cdots < i_k),$$

而且它們都是单权. 設 $e_1, e_2, \cdots, e_{n+1}$ 分别是 V 中相应于权 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{n+1}$ 的权向量,则

$$[e_1, e_2, \cdots, e_k]$$

就是 $V^{[k]}$ 中相应于 $\pi_1^{[k]}$ 的最高权

$$\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_k$$

的权向量. 注意

$$\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_k = \frac{n-k+1}{n+1}\lambda_1 + \cdots + + \frac{n-k+1}{n+1}\lambda_k + \frac{-k}{n+1}\lambda_{k+1} + \cdots + \frac{-k}{n+1}\lambda_{n+1},$$

而

$$\omega_{i_1} + \omega_{i_2} + \cdots + \omega_{i_k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{n-k+1}{n+1}\lambda_{i_j} + + \sum_{l \neq 1,\cdots,k} \frac{-k}{n+1}\lambda_{i_l}.$$

易見 $\pi_1^{[k]}$ 的任一权 $\omega_{i_1} + \omega_{i_r} + \cdots + \omega_{i_k}$ 皆可通过 A_n 的 Weyl 羣的一个元素从 $\omega_1 + \cdots + \omega_r$ 获得,因此 $\pi_1^{[k]}$ 不可約.

置

$$\pi_k = \pi_1^{[k]}, \quad k = 1, 2, \cdots, n,$$
$$\pi^k = \pi^{1[k]}, \quad k = 1, 2, \cdots, n,$$

那么 $\pi_1, \cdots, \pi_n$ 就是 A_n 所有的基本表示；$\pi^1, \pi^2, \cdots, \pi^n$ 亦然；而且

$$\pi_k \sim \pi^{n+1-k}, \quad k = 1, 2, \cdots, n.$$

最后，我們研究怎样从张量空間得出 A_n 的任一不可約表示。以 $\pi_{k_1k_2\cdots k_n}$ 表其图为

$$\begin{array}{cccccc} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 & k_{n-1} & k_n \\ \circ\!-\!-\!- & \circ\!-\!-\!- & \circ\!-\!-\!- & \circ\cdots\cdots & \circ\!-\!-\!- & \circ \\ 1 & 2 & 3 & 4 & n-1 & n \end{array}$$

的不可約表示。这个不可約表示可用基本表示造出：

$$\pi_{k_1k_2\cdots k_n} = \overline{\pi_1^{k_1}\otimes\pi_2^{k_2}\otimes\cdots\otimes\pi_n^{k_n}}.$$

以空間 $V_1, V_2, \cdots, V_n$ 表 $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n$ 的表示空間，則在

$$V_1^{k_1}\otimes V_2^{k_2}\otimes\cdots\otimes V_n^{k_n}$$

中，相应于最高权

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \cdots + k_n\omega_n$$

$(\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ 分别是 $\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_n$ 的首权)的向量是

$$\underbrace{e_1\otimes\cdots\otimes e_1}_{k_1}\otimes\underbrace{[e_1, e_2]\otimes\cdots\otimes[e_1, e_2]}_{k_2}\otimes$$
$$\otimes\cdots\otimes\underbrace{[e_1, \cdots, e_n]\otimes\cdots\otimes[e_1, \cdots, e_n]}_{k_n}.$$

令 $\nu = k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n$，則这个向量是张量空間 V^ν 中的向量。因此，若分解张量空間 V^ν 成不可約子空間，就会有一个不可約子空間上作用着表示 $\pi_{k_1k_2\cdots k_n}$。

§ 2. 李代数 C_n 的表示

已知 C_n 的根是

$$\pm\lambda_i\pm\lambda_k, \quad \pm 2\lambda_i \quad (i, k = 1, 2, \cdots, n; i < k)$$

而

$$\lambda_1-\lambda_2,\ \lambda_2-\lambda_3,\ \cdots,\ \lambda_{n-1}-\lambda_n,\ 2\lambda_n$$

是一組基础根系. 我們知道

$$\mathfrak{h}_0^*=\{a_1\lambda_1+\cdots+a_n\lambda_n|a_i\ 实数\}$$

中有一定正內积

$$(\lambda_1,\lambda_1)=(\lambda_2,\lambda_2)=\cdots=(\lambda_n,\lambda_n)=\frac{1}{4n+4},$$

$$(\lambda_p,\lambda_q)=0\quad 如\quad p\neq q.$$

我們研究 $\mathfrak{h}_0^*$ 中一元

$$\omega=a_1\lambda_1+a_2\lambda_2+\cdots+a_n\lambda_n$$

何时是 C_n 的某一表示的权. 如 ω 是权,

$$\frac{2(\omega,\pm\lambda_i\pm\lambda_k)}{(\pm\lambda_i\pm\lambda_k,\pm\lambda_i\pm\lambda_k)}=\pm a_i\pm a_k\ 和\ \frac{2(\omega,\pm 2\lambda_i)}{(\pm 2\lambda_i,\pm 2\lambda_i)}=\pm a_i$$

一定都是整数. 这样一来, a_i 全是整数. 其次, 如 ω 是某一不可約表示的首权,一定有

$$\frac{2(\omega,\lambda_i-\lambda_{i+1})}{(\lambda_i-\lambda_{i+1},\lambda_i-\lambda_{i+1})}=a_i-a_{i+1}\geqslant 0\ 和\ \frac{2(\omega,2\lambda_n)}{(2\lambda_n,2\lambda_n)}=a_n\geqslant 0,$$

因此

$$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant 0.$$

当 $n\geqslant 2$ 时,如 $\omega_{\lambda_i-\lambda_{i+1}}$ 是基础表示 $\rho_{\lambda_i-\lambda_{i+1}}$ 的首权,就有

$$a_i-a_{i+1}=1,$$

$$a_1-a_2=a_2-a_3=\cdots=a_{i-1}-a_i=a_{i+1}-a_{i+2}=$$
$$=\cdots=a_{n-1}-a_n=a_n=0.$$

因此

$$\omega_{\lambda_i-\lambda_{i+1}}=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_i\quad(i=1,\cdots,n-1).$$

又如 $\omega_{2\lambda_n}$ 是基础表示 $\rho_{2\lambda_n}$ 的首权,就有

$$a_1-a_2=a_2-a_3=\cdots=a_{n-1}-a_n=0,\quad a_n=1,$$

于是

$$\omega_{2\lambda_n}=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n.$$

当 $n \geqslant 2$ 时，C_n 一共有两个初等表示，即 $\rho_{\lambda_1-\lambda_2}$ 和 $\rho_{2\lambda_n}$（对任意 $X \in C_n$）。令

$$X \to X,$$

就得到 C_n 的一个不可約表示，它的权是

$$\pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \cdots, \pm\lambda_n.$$

它們都是单权，而 λ_1 是最高权，因此这个表示就是 $\rho_{\lambda_1-\lambda_2}$，将它簡記作 ρ_1。置

$$\rho_k = \overline{\rho_1^{[k]}} \quad (k = 1, 2, \cdots, n),$$

則 $\rho_1, \rho_2, \cdots, \rho_n$ 就是 C_n 的基础表示，而 ρ_n 即是 C_n 的另一个初等表示 $\rho_{2\lambda_n}$。

以 $\rho_{k_1k_2\cdots k_n}$ 表其图为

$$\overset{k_1}{\underset{1}{\bullet}}—\overset{k_2}{\underset{2}{\bullet}}—\overset{k_3}{\underset{3}{\bullet}}—\bullet\cdots\bullet—\bullet=\overset{k_n}{\underset{n}{\circ}}$$

的不可約表示，显然有

$$\rho_{k_1k_2\cdots k_n} = \overline{\rho_1^{k_1} \otimes \rho_2^{k_2} \otimes \cdots \otimes \rho_n^{k_n}}.$$

§3. 李代数 B_n 的表示

已知 B_n 的根是

$$\pm\lambda_i \pm \lambda_k (i < k), \quad \pm\lambda_i \quad (i, k = 1, \cdots, n)$$

而

$$\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2 - \lambda_3, \cdots, \lambda_{n-1} - \lambda_n, \lambda_n$$

是一組基础根系。我們知道

$$\mathfrak{h}_0^* = \{a_1\lambda_1 + \cdots + a_n\lambda_n \mid a_i \text{ 实数}\}$$

中有一定正內积

$$(\lambda_1, \lambda_1) = \cdots = (\lambda_n, \lambda_n) = \frac{1}{4n-2}$$

$$(\lambda_p, \lambda_q) = 0, \quad p \neq q.$$

設 $\omega = a_1\lambda_1 + \cdots + a_n\lambda_n$ 是 C_n 的某一表示的权，則

$$\frac{2(\omega, \pm\lambda_i \pm \lambda_k)}{(\pm\lambda_i \pm \lambda_k, \pm\lambda_i \pm \lambda_k)} = \pm a_i \pm a_k \quad \text{和} \quad \frac{2(\omega, \pm\lambda_i)}{(\pm\lambda_i, \pm\lambda_i)} = \pm 2a_i$$

都是整数．因此，$a_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 或者全都是整数，或者全都是半整数．又如 ω 是某一不可約表示的首权，則有

$$a_i-a_{i+1}\geqslant 0 \quad 及 \quad 2a_n\geqslant 0.$$

因此

$$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant 0.$$

当 $n\geqslant 2$ 时，再如設 ω 是基础表示 $\rho_{\lambda_i-\lambda_{i+1}}$ 的首权，就有

$$a_i-a_{i+1}=1,$$
$$a_1-a_2=\cdots=a_{i-1}-a_i=a_{i+1}-a_{i+2}=\cdots=$$
$$=a_{n-1}-a_n=2a_n=0,$$

因此 $\rho_{\lambda_i-\lambda_{i+1}}$ 的首权是

$$\omega_{\lambda_i-\lambda_{i+1}}=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_i \quad (i=1,\cdots,n-1).$$

又如 ω 是基础表示 ρ_{λ_n} 的首权，就有

$$a_1-a_2=a_2-a_3=\cdots=a_{n-1}-a_n=0, \quad 2a_n=1.$$

因此 ρ_{λ_n} 的首权是

$$\omega_{\lambda_n}=\frac{1}{2}\lambda_1+\frac{1}{2}\lambda_2+\cdots+\frac{1}{2}\lambda_n.$$

当 $n\geqslant 2$ 时，B_n 一共有两个初等表示，即 $\rho_{\lambda_1-\lambda_2}$ 和 ρ_{λ_n}．对任意 $X\in B_n$ 令

$$X\to X,$$

就得到 B_n 的一个不可約表示，它的权是

$$\pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \cdots, \pm\lambda_n.$$

它們都是单权，而 λ_1 是最高权，因此这个表示就是 $\rho_{\lambda_1-\lambda_2}$，将它簡記作 τ_1．置

$$\tau_k=\overline{\tau_1^{[k]}}, \quad k=1, 2,\cdots, n-1, n.$$

于是 $\tau_k(k=1, 2, \cdots n-1)$ 給出 B_n 的 $n-1$ 个基础表示．B_n 的另一个基础表示 ρ_{λ_n} 也就是初等表示，記作 σ，称为旋表示，σ 的首权是 $\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)$，而权系是 $\frac{1}{2}(\pm\lambda_1\pm\lambda_2\pm\pm\cdots\pm\lambda_n)$．

以 $\tau_{k_1k_2\cdots k_{n-1}}$ 表图为

$$\overset{k_1}{\circ}—\overset{k_2}{\circ}—\overset{k_3}{\circ}—\circ\cdots\cdots\circ—\overset{k_{n-1}}{\circ}=\overset{0}{\bullet}$$

的不可約表示，显然有

$$\tau_{k_1k_2\cdots k_{n-1}}=\overline{\tau_1{}^{k_1}\otimes\cdots\otimes\tau_{n-1}{}^{k_{n-1}}},$$

而 B_n 的任一不可約表示可表作

$$\overline{\tau_{k_1k_2\cdots k_{n-1}}\otimes\sigma^k}.$$

易証

$$\overline{\sigma^2}=\overline{\tau_1^{[n]}},\quad \overline{\sigma^{[2]}}=\overline{\tau_1^{[n-1]}}.$$

§4. 李代数 D_n 的表示

設 $n\geqslant 4$. 已知 D_n 的根是

$$\pm\lambda_i\pm\lambda_k\quad(i<k,\ i,k=1,\cdots,n),$$

而

$$\lambda_1-\lambda_2,\ \lambda_2-\lambda_3,\ \cdots,\ \lambda_{n-1}-\lambda_n,\ \lambda_{n-1}+\lambda_n$$

是一組基础根系. 已知

$$\mathfrak{h}_0^*=\{a_1\lambda_1+\cdots+a_n\lambda_n\,|\,a_i\text{ 实数}\}$$

中有一定正內积

$$(\lambda_1,\lambda_1)=\cdots=(\lambda_n,\lambda_n)=\frac{1}{4n-4}.$$

$$(\lambda_p,\lambda_q)=0,\quad \text{如 } p\neq q.$$

設 $\omega=a_1\lambda_1+\cdots+a_n\lambda_n$ 是 D_n 的一个权，則

$$\frac{2(\omega,\ \pm\lambda_i\cdot\pm\lambda_k)}{(\pm\lambda_i\pm\lambda_k,\ \pm\lambda_i\pm\lambda_k)}=\pm a_i\pm a_k$$

都是整数，因此 $a_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 或者全是整数，或者全是半整数. 又如 ω 是某一不可約表示的首权，則

$$a_i-a_{i+1}\geqslant 0\quad \text{及}\quad a_{n-1}+a_n\geqslant 0.$$

因此

$$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_{n-1}\geqslant 0,\quad a_{n-1}\geqslant a_n,\quad a_{n-1}+a_n\geqslant 0.$$

再如 ω 是基础表示 $\rho_{\lambda_i-\lambda_{i+1}}(i=1,2,\cdots,n-2)$ 的首权，就有

$$a_i - a_{i+1} = 1,$$

$$a_1 - a_2 = \cdots = a_{i-1} - a_i = a_{i+1} - a_{i+2} = \cdots =$$
$$= a_{n-1} - a_n = a_{n-1} + a_n = 0.$$

因此 $\rho_{\lambda_i - \lambda_{i+1}}$ $(i = 1, 2, \cdots, n-2)$ 的首权是

$$\omega_{\lambda_i - \lambda_{i+1}} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n-2).$$

又如 ω 是基础表示 $\rho_{\lambda_{n-1} - \lambda_n}$ 的首权，就有

$$a_1 - a_2 = \cdots = a_{n-2} - a_{n-1} = 0, \quad a_{n-1} - a_n = 1,$$
$$a_{n-1} + a_n = 0,$$

于是 $\rho_{\lambda_{n-1} - \lambda_n}$ 的首权

$$\omega_{\lambda_{n-1} - \lambda_n} = \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 + \cdots + \frac{1}{2}\lambda_{n-1} - \frac{1}{2}\lambda_n.$$

再如 ω 是基础表示 $\rho_{\lambda_{n-1} + \lambda_n}$ 的首权，就有

$$a_1 - a_2 = \cdots = a_{n-2} - a_{n-1} = a_{n-1} - a_n = 0,$$
$$a_{n-1} + a_n = 1.$$

于是

$$\omega_{\lambda_{n-1} + \lambda_n} = \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_2 + \cdots + \frac{1}{2}\lambda_{n-1} + \frac{1}{2}\lambda_n.$$

D_n 一共有三个初等表示，即 $\rho_{\lambda_1 - \lambda_2}$, $\rho_{\lambda_{n-1} - \lambda_n}$ 和 $\rho_{\lambda_{n-1} + \lambda_n}$. 对任意 $X \in D_n$, 令

$$X \to X,$$

就得到 D_n 的一个不可約表示，它的权是

$$\pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \cdots, \pm\lambda_n.$$

它們都是单权，而 λ_1 是最高权，因此这个表示就是 $\rho_{\lambda_1 - \lambda_2}$，将它簡記作 τ_1. 置

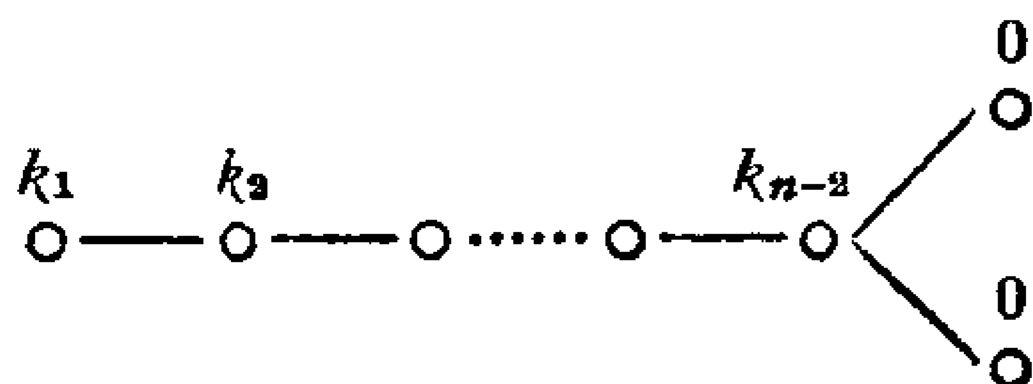
$$\tau_k = \tau_1^{[k]} \quad (k = 1, 2, \cdots, n-2),$$

这就得到 D_n 的 $n-2$ 个基础表示. 剩下的两个初等表示，分别記作 σ_1 和 σ_2，称为旋表示.

仍以

$$\tau_{k_1 k_2 \cdots k_{n-2}} = \overline{\tau_1{}^{k_1} \otimes \cdots \otimes \tau_{n-2}{}^{k_{n-2}}}$$

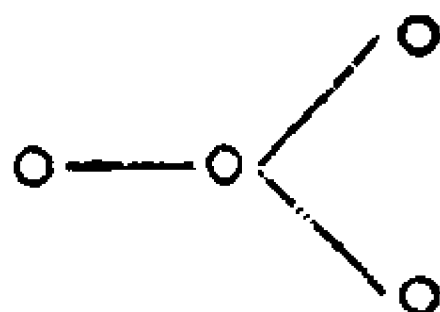
記图为



的不可約表示。可以証明

$$\overline{\sigma_1 \otimes \sigma_2} \sim \overline{\tau_1^{[n-1]}}$$
$$\overline{\sigma_1}^2 \dot{+} \overline{\sigma_2}^2 \sim \overline{\tau_1^{[n]}},$$
$$\overline{\sigma_1^{[2]}} \sim \overline{\sigma_2^{[2]}} \sim \overline{\tau_1^{[n-2]}}.$$

特別，当 $n=4$ 时，D_4 有 Dynkin 图



記 D_4 的三个初等表示为 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$，其一可取作 $\rho_{\lambda_1-\lambda_2}$，而另外两个取作旋表示。这时我們还有

$$\overline{\sigma_1^{[2]}} \sim \overline{\sigma_2^{[2]}} \sim \overline{\sigma_3^{[2]}} \sim \rho_{\lambda_2-\lambda_3}.$$

第十二章　旋表示与例外李代数

§1. 結合代数

設 A 是复数域 C 上的向量空間（維数可以有限也可以无限）. 設在 A 中定义了一个乘法运算，即对任意 $x, y \in A$，有唯一确定的一个元素 $z \in A$ 与之对应，z 称为 x 与 y 的积，記作 $z = xy$. 更假定这个乘法运算对任意 $x, y, z \in A$ 及 $\lambda \in C$，适合以下条件：

1) $x(y+z) = xy + xz$,

$(x+y)z = xz + yz$,

2) $(xy)z = x(yz)$,

3) $(\lambda x)y = x(\lambda y) = \lambda(xy)$.

那么我們就称 A 是 C 上的一个結合代数，或簡称**結合代数**. 結合代数 A 的維数是指它的向量空間的維数.

例 1. C 上所有 $n \times n$ 的矩陣对矩陣加法、数乘和矩陣乘法組成一結合代数，它的維数是 n^2，这个代数称为 n 级全陣代数. 同样，C 上一个 n 維向量空間中所有綫性变换对綫性变换的加法、数乘和线性变换乘法也组成一结合代数.

例 2. 設 V 是一复向量空間. 假設它的維数为 r. 設 $e_1, e_2, \cdots, e_r$, 是 V 的一組基，以 T^k 表由

$$e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}, \quad 1 \leqslant i_1, i_2, \cdots, i_k \leqslant r,$$

为基所生成的复向量空間；特别 $T^0 = C$, $T^1 = V$. 造 T^k 的直和 $T = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$. 定义

$$(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_k})(e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \cdots \otimes e_{j_l}) =$$
$$= e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \otimes e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_l}.$$

对于 T 中任意二元素的积，用上式及分配律来定义，这样 T 就成了

一个結合代数，称为 V 的张量代数. 这个結合代数是无限維的.

設 A 是个結合代数. A 的元素 1 称为单位元素，如

$$1\cdot x = x\cdot 1 = x, \quad \text{对一切 } x\in A.$$

設 A_1 是結合代数 A 的子空間，A_1 称为 A 的一个子代数，如 A_1 对于 A 的乘法运算是封閉的. A 的子空間 A_2 称为 A 的理想(或双边理想)，如果对任意 $x\in A_2$ 和 $y\in A$ 都有 $xy\in A_2$ 及 $yx\in A_2$. 如 A_2 是 A 的理想，可仿照李代数中情况定义商代数. 如子空間 A_1 对任意 $x\in A_1$ 和 $y\in A$ 有 $yx\in A_1$，則 A_1 称为左理想. 同样亦可定义右理想.

对于結合代数，亦可象李代数一样定义同态、同构等概念. 如果一个同态将单位元映成单位元，則称它为么同态.

設 A 为結合代数，容易驗証 A 对于其中的加法及换位运算 $[x, y] = xy - xy$ 成一李代数. 記此李代数为 A_L. 将李代数 $\mathfrak{g}$ 映入 A 的一个映射称为 $\mathfrak{g}$ 的一个表示，如这个映射将 $\mathfrak{g}$ 同态地映入 A_L. 以前討論的綫性表示是表示的特例.

§2. Clifford 代数

設 V 是个 r 維的向量空間，$e_1, e_2, \cdots, e_r$ 是 V 的一組基. 以 T 表 V 的张量代数，我們知道 $T = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$，而 T^k 是以

$$e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\cdots\otimes e_{i_k}, \quad 1\leqslant i_1, i_2, \cdots, i_k\leqslant r$$

为基张成的向量空間，令

$$T_+ = \sum_{k=0}^{\infty} T^{2k}, \qquad T_- = \sum_{k=0}^{\infty} T^{2k+1}.$$

于是有 $T = T_+ \dotplus T_-$ 而

$$T_+T_+\subset T_+,\ T_+T_-\subset T_-,\ T_-T_+\subset T_-,\ T_-T_-\subset T_+.$$

可見 T_+ 是 T 的一个子代数.

以 I 表元素

$$\left.\begin{array}{ll} e_i \otimes e_i - 1, & i = 1, 2, \cdots, r \\ e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i & i \neq j, i, j = 1, \cdots, r \end{array}\right\} \quad (1)$$

在 T 中所生成的理想,以 $\mathfrak{C}$ 表商代数 T/I, 則 $\mathfrak{C}$ 称为 V 的 Clifford 代数. 由于 I 的生成元 (1) 都属于 T_+, 所以 $I = I_+ \dotplus I_-$ 而 $I_+ = I \cap T_+$, $I_- = I \cap T_-$. 如令 $\mathfrak{C}_+ = T_+/I_+$, $\mathfrak{C}_- = T_-/I_-$, 則 $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_+ \dotplus \mathfrak{C}_-$,而且

$$\mathfrak{C}_+\mathfrak{C}_+ \subset \mathfrak{C}_+,\ \mathfrak{C}_+\mathfrak{C}_- \subset \mathfrak{C}_-,\ \mathfrak{C}_-\mathfrak{C}_+ \subset \mathfrak{C}_-,\ \mathfrak{C}_-\mathfrak{C}_- \subset \mathfrak{C}_+.$$

設 $x \in \mathfrak{C}$,写 $x = y + z$, $y \in \mathfrak{C}_+$, $z \in \mathfrak{C}_-$. 定义

$$\bar{x} = y - z,$$

則 $x \to \bar{x}$ 是 $\mathfrak{C}$ 的一个自同构, 而且是对合性的, 即 $\bar{\bar{x}} = x$, 我們把它称为 $\mathfrak{C}$ 的主对合.

以 f 記将 T 映入 $\mathfrak{C} = T/I$ 的自然同态. 如 $v \in V$, 記 $f(v) = \underline{v}$. 我們有

定理 1. $\mathfrak{C}$ 是 2^r 維的結合代数,而

$$\underline{e}_{i_1}\underline{e}_{i_2}\cdots\underline{e}_{i_s},\ s = 0, 1, \cdots, r,\ 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leqslant r.$$

构成 $\mathfrak{C}$ 的一組基. 因此 $\mathfrak{C}$ 是由 $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \cdots, \underline{e}_r$ 生成的結合代数且它們适合关系

$$\begin{array}{ll} \underline{e}_i^2 = 1, & i = 1, 2, \cdots, r, \\ \underline{e}_i\underline{e}_j + \underline{e}_j\underline{e}_i = 0, & i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \cdots, r. \end{array}$$

証. 由于 I 由 $e_i \otimes e_i - 1$ $(i = 1, 2, \cdots, r)$ 及 $e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i$ $(i \neq j, i, j = 1, \cdots, r)$ 生成,所以

$$\begin{array}{ll} \underline{e}_i^2 = 1, & i = 1, 2, \cdots, r, \\ \underline{e}_i\underline{e}_j + \underline{e}_j\underline{e}_i = 0, & i \neq j, i, j = 1, \cdots, r. \end{array}$$

因此

$$\underline{e}_{i_1}\underline{e}_{i_2}\cdots\underline{e}_{i_s}\quad s = 0, 1, \cdots, r,\ 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_s \leqslant r$$

綫性地生成 $\mathfrak{C}$. 还要証明它們綫性无关. 我們对 k 行归納法来証明以下命題:

(P_k) 由 $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \cdots, \underline{e}_r$ 中任意固定的 k 个 $\underline{e}_{i_1}, \underline{e}_{i_2}, \cdots, \underline{e}_{i_k}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_k)$ 所构成的

$e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_s}$ $s=0,1,\cdots,k$, $j_1,\cdots,j_s$ 取自 $i_1,\cdots,i_k$,
而 $1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_s\leqslant r$ 綫性无关.

当 $k=0$ 及 $k=1$ 时,这是显然的[1].

設 $k>1$,并假定 P_{k-1} 已成立。設有綫性关系

$$\sum_{\substack{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_s\leqslant r\\ \{j_1,\cdots,j_s\}\in\{i_1,\cdots,i_k\}}} c_{j_1j_2\cdots j_s}e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_s}=0. \tag{2}$$

如 e_{i_k} 在以上关系式中不出現,則根据归納法假設,对一切 $\{j_1,\cdots,j_s\}\in\{i_1,\cdots,i_{k-1}\}$ 而 $1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_s\leqslant r$,就有 $c_{j_1j_2\cdots j_s}=0$. 以下設 e_{i_k} 的确在(2)式中出現. 这时可将(2)式写作

$$x+ye_{i_k}=0, \tag{3}$$

其中 x,y 是 $e_{i_1},\cdots,e_{i_{k-1}}$ 中某些的积的綫性組合:

$$x=\sum_{\substack{1\leqslant j_1<\cdots<j_s\leqslant r\\ \{j_1,\cdots,j_s\}\in\{i_1\cdots i_{k-1}\}}} c_{j_1j_2\cdots j_s}e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_s},$$

$$y=\sum_{\substack{1\leqslant j_1<\cdots<j_{s-1}\leqslant r\\ \{j_1,\cdots,j_{s-1}\}\in\{i_1,\cdots,i_{k-1}\}}} c_{j_1j_2\cdots j_{s-1}i_k}e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_{s-1}}.$$

将(3)式右乘以 e_{i_k} 得

$$xe_{i_k}+y=0. \tag{4}$$

将(3),(4)两式相加得

$$(x+y)(1+e_{i_k})=0. \tag{5}$$

将 $x+y$ 写作

$$x+y=u+ve_{i_{k-1}},$$

其中 u,v 是 $e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_{k-2}}$ 中某些的积的綫性組合,于是(5)式成为

$$(u+ve_{i_{k-1}})(1+e_{i_k})=0. \tag{6}$$

---

1) 当 $k=0$ 时,要求証明 $1\notin I$, 这也可以从定理 2 推得.

将上式右乘以 $e_{i_{k-1}}$ 得

$$0=(u+ve_{i_{k-1}})(1+e_{i_k})e_{i_{k-1}}=$$
$$=(u+ve_{i_{k-1}})e_{i_{k-1}}(1-e_{i_k})=(ue_{i_{k-1}}+v)(1-e_{i_k}),$$

卽

$$(ue_{i_{k-1}}+v)(1-e_{i_k})=0. \tag{7}$$

又,将(6)式作用以 $\mathfrak{C}$ 的主对合,得

$$(\bar{u}+\bar{v}\bar{e}_{i_{k-1}})(1+\bar{e}_{i_k})=0,$$

卽

$$(\bar{u}-\bar{v}e_{i_{k-1}})(1-e_{i_k})=0.$$

将上式左乘以 $e_{i_{k-1}}$,注意 $\bar{u}$, $\bar{v}$ 中不含 $e_{i_{k-1}}$,故有

$$0=e_{i_{k-1}}(\bar{u}-\bar{v}e_{i_{k-1}})(1-e_{i_k})=(ue_{i_{k-1}}-v)(1-e_{i_k}),$$

卽

$$(ue_{i_{k-1}}-v)(1-e_{i_k})=0. \tag{8}$$

将(7),(8)两式相加相减得

$$2ue_{i_{k-1}}(1-e_{i_k})=0, \tag{9}$$
$$2v(1-e_{i_k})=0. \tag{10}$$

将(9)式右乘以 $e_{i_{k-1}}$,得

$$2u(1+e_{i_k})=0. \tag{11}$$

注意(10),(11)两式中只含 $e_{i_1},\cdots,e_{i_{k-2}},e_{i_k}$,共 $k-1$ 个. 因此根据归納法假設有 $u=v=0$, 于是 $x+y=0$. 又将(3)(4)两式相減,得

$$(x-y)(1-e_{i_k})=0.$$

同法可証 $x-y=0$. 因此 $x=y=0$. 这就証明了(2)式的系数全为 0,因此 P_k 也成立.

我們証明了

$$e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_s}\quad s=0,1,\cdots,r,\ 1\leqslant i_1<i_2<\cdots i_s\leqslant r$$

綫性无关,卽它們是 $\mathfrak{C}$ 的一組基.

基于定理 1, $\mathfrak{C}$ 有一子空間

$$\{c_1e_1+c_2e_2+\cdots+c_re_r \mid c_i \text{ 为复数}\}$$

与 V 同构。 以后将它們視为同一，并将 $\underline{e}_i$ 簡記作 $e_i(i=1, 2, \cdots, r)$.

定理 2. 設 $r=2n$,則 $\mathfrak{C}$ 与复数域上 2^n 級全矩陣代数 M_{2^n} 同构.

証. 記 $p_i=e_i(i=1, 2, \cdots, n)$, $q_i=e_{n+i}(i=1, \cdots, n)$, 則

$$\left.\begin{aligned} &p_i^2=q_i^2=1, \quad i=1, \cdots, n \\ &p_iq_j+q_jp_i=0, \quad i, j=1, 2, \cdots, n \\ &p_ip_j+p_jp_i=q_iq_j+q_jq_i=0, \quad i \neq j, i, j=1, 2, \cdots, n \end{aligned}\right\}(12)$$

于是 $\mathfrak{C}$ 就是由 p_i, $q_i(i=1, \cdots, n)$ 生成的結合代数,而它們适合关系(12)。設

$$I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad J_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad P=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$Q=\begin{pmatrix}0 & \sqrt{-1}\\ -\sqrt{-1} & 0\end{pmatrix}.$$

令

$$\left.\begin{aligned} &p_i \rightarrow P_i=J_2\otimes\cdots\otimes J_2\otimes \underset{(\text{第 } i \text{ 位置})}{P}\otimes I_2\otimes\cdots\otimes I_2, \\ &q_i \rightarrow Q_i=J_2\otimes\cdots\otimes J_2\otimes \underset{(\text{第 } i \text{ 位置})}{Q}\otimes I_2\otimes\cdots\otimes I_2. \end{aligned}\quad (i=1, \cdots, n)\right\}(13)$$

易証 P_i, $Q_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 亦适合关系式 (12). 这样利用 (13)式就定义了一个从 $\mathfrak{C}$ 映入 M_{2^n} 的同态 φ. 如能証明这个同态是映上的，則由于 $\dim \mathfrak{C}=\dim M_{2^n}=2^{2n}$，即可推出这个同态是从 $\mathfrak{C}$ 映到 M_{2^n} 之上的同构.

实际上，

$$u_i=\sqrt{-1}\,p_iq_i \rightarrow U_i=\sqrt{-1}\,P_iQ_i=I_2\otimes\cdots\otimes I_2\otimes \underset{(\text{第 } i \text{ 位置})}{J_2}\otimes I_2\otimes\cdots\otimes I_2,$$

于是

$$U_1\cdots U_{i-1}P_i = I_2\otimes\cdots\otimes I_2\otimes P\otimes I_2\otimes\cdots\otimes I_2,$$
（第 i 位置）

$$U_1\cdots U_{i-1}Q_i = I_2\otimes\cdots\otimes I_2\otimes Q\otimes I_2\otimes\cdots\otimes I_2$$

都属于 $\varphi(\mathfrak{C})$。我們有

$$\frac{1}{2}(1+u_i)\to I_2\otimes\cdots\otimes I_2\otimes\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\otimes I_2\otimes\cdots\otimes I_2,$$
（第 i 位置）

$$\frac{1}{2}(u_1\cdots u_{i-1})(p_i-\sqrt{-1}\,q_i)\to I_2\otimes\cdots\otimes I_2\otimes\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\otimes$$
$$\otimes I_2\otimes\cdots\otimes I_2,$$

$$\frac{1}{2}(u_1\cdots u_{i-1})(p_i+\sqrt{-1}\,q_i)\to I_2\otimes\cdots\otimes I_2\otimes\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\otimes$$
$$\otimes I_2\otimes\cdots\otimes I_2,$$

$$\frac{1}{2}(1-u_i)\to I_2\otimes\cdots\otimes I_2\otimes\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\otimes I_2\otimes\cdots\otimes I_2.$$

由此即推出 $\varphi(\mathfrak{C})=M_{2^n}$. 定理 2 証毕.

§3. 旋 表 示

設 V 是 m 維的向量空間，$e_1, e_2, \cdots, e_m$ 是它的一組基. $\mathfrak{C}$ 是由 $e_1, e_2, \cdots, e_m$ 所生成的 Clifford 代数而

$$e_i^2=1,\qquad i=1,2,\cdots,m,$$
$$e_ie_j+e_je_i=0,\quad i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,m,$$

在 $\mathfrak{C}$ 中引进換位运算：$x, y\in\mathfrak{C}$，定义 $[x,y]=xy-yx$，則 $\mathfrak{C}$ 成一李代数，記作 $\mathfrak{C}_L$. 考察 $\mathfrak{C}_L$ 中一切形如

$$\sum_{1\leqslant i<k\leqslant m} c_{ik}e_ie_k\quad c_{ik}\in C$$

的元素，它們組成 $\mathfrak{C}_L$ 的一个子代数，記作 $\mathfrak{C}_2$. 我們有

定理 3. $\mathfrak{C}_2$ 与一切 $m\times m$ 斜对称矩陣組成的李代数

$\mathfrak{o}(m, C)$ 同构,而

$$\sum_{1\leqslant i<k\leqslant m} c_{ik}e_ie_k \overset{\tau}{\longleftrightarrow} 2\sum_{1\leqslant i<k\leqslant m} c_{ik}(E_{ik}-E_{ki})$$

为一同构对应。

証. 設

$$\left.\begin{aligned} \tau(e_ie_k) &= 2(E_{ik}-E_{ki}), \\ \tau(e_j e_l) &= 2(E_{jl}-E_{lj}). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

若 i, k, j, l 两两不同,则

$$[e_ie_k, e_je_l] = e_ie_ke_je_l - e_je_le_ie_k = e_ie_ke_je_l - e_ie_ke_je_l = 0.$$

同时也有

$$[E_{ik}-E_{ki}, E_{jl}-E_{lj}] = 0.$$

又若 $i, k; j, l$ 中只有二足碼相同,不妨設 $k=j$,于是

$$[e_ie_k, e_ke_l] = e_ie_ke_ke_l - e_ke_le_ie_k = e_ie_l - e_le_i = 2e_ie_l$$

而

$$[E_{ik}-E_{ki}, E_{kl}-E_{lk}] = E_{il}-E_{li}.$$

又若 $i=j$, $k=l$,自然有

$$[e_ie_k, e_ie_k] = 0,$$
$$[E_{ik}-E_{ki}, E_{ik}-E_{ki}] = 0.$$

这証明了 τ 是个同构. 从而証明了定理 3.

又以 $\mathfrak{C}_{12}$ 記 $\mathfrak{C}_L$ 中一切形如

$$\sum_{i=1}^{m} a_ie_i + \sum_{1\leqslant i<k\leqslant m} c_{ik}e_ie_k \quad a_i, c_{ik}\in C$$

的元素,它們也組成 $\mathfrak{C}_L$ 的一个子代数. 我們有

定理 4. $\mathfrak{C}_{12}$ 与 $\mathfrak{o}(m+1, c)$ 同构,而

$$\Sigma a_ie_i + \Sigma c_{ik}e_ie_k \xrightarrow{\tau} \sum_i 2\sqrt{-1}\, a_i(E_{0i}-E_{i0}) +$$
$$+ 2\sum_{1\leqslant i<k\leqslant m} c_{ik}(E_{ik}-E_{ki})$$

为一同构对应。

證.　这时除了(1)式外还有

$$e_i \xrightarrow{\tau} 2\sqrt{-1}(E_{0i}-E_{i0}).$$

若 $i \neq k$

$$[e_i,\ e_k] = e_ie_k - e_ke_i = 2e_ie_k,$$

$$\begin{aligned}[2\sqrt{-1}(E_{0i}-E_{i0}),\ 2\sqrt{-1}(E_{0k}-E_{k0})] &= \\ &= -4\{-E_{i0}E_{0k}-(-E_{k0})E_{0i}\} = \\ &= -4(-E_{ik}+E_{ki}) = 4(E_{ik}-E_{ki}).\end{aligned}$$

若 i, k 不同,

$$[e_i,\ e_ie_k] = e_ie_ie_k - e_ie_ke_i = e_k + e_k = 2e_k,$$

$$[2\sqrt{-1}(E_{0i}-E_{i0}),\ 2(E_{ik}-E_{ki})] = 4\sqrt{-1}(E_{0k}-E_{k0}).$$

若 i, j, k 不同,

$$[e_i,\ e_je_k] = e_ie_je_k - e_je_ke_i = 0,$$

$$[2\sqrt{-1}(E_{0i}-E_{i0}),\ 2(E_{jk}-E_{kj})] = 0.$$

这証明了定理 2.

以下設 $m = 2n$ 为偶数.

我們注意

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

于是,如令

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I_n & \frac{1}{\sqrt{2}}I_n \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}I_n & \frac{i}{\sqrt{2}}I_n \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}I_n & \frac{1}{\sqrt{2}}I_n \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}I_n & \frac{i}{\sqrt{2}}I_n \end{pmatrix},$$

則

$$P\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}P' = I_m,$$

或

$$P\begin{pmatrix}1 & & \\ & 0 & I_n \\ & I_n & 0\end{pmatrix}P' = I_{2n+1}.$$

因此

$$X \xrightarrow{\psi} PXP^{-1}$$

是从 D_n（或 B_n）映上 $\mathfrak{o}(2n, C)$ 或 $\mathfrak{o}(2n+1, C)$ 的同构.

先研究 B_n. 元素

$$H_{\lambda_1\cdots\lambda_n} = \begin{pmatrix}0 & & & & & & \\ & \lambda_1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda_n & & & \\ & & & & -\lambda_1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & -\lambda_n\end{pmatrix}$$

在 ψ 之下映到

$$\begin{pmatrix}1 & & \\ & \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{1}{\sqrt{2}}I \\ & -\frac{i}{\sqrt{2}}I & \frac{i}{\sqrt{2}}I\end{pmatrix} H \begin{pmatrix}1 & & \\ & \frac{1}{\sqrt{2}}I & \frac{i}{\sqrt{2}}I \\ & \frac{1}{\sqrt{2}}I & -\frac{i}{\sqrt{2}}I\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & 0 & & i\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} \\ & -i\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} & & 0 \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

在 τ^{-1} 之下

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & 0 & & i\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} \\ & -i\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} & & 0 \\ 0 & & & \end{pmatrix} =$$

$$= i\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(E_{i\ n+i}-E_{n+i\ i}) \to \frac{1}{2}i\sum_{1}^{n}\lambda_i e_i e_{n+i}.$$

在 φ 之下

$$\frac{1}{2}i\sum_{1}^{n}\lambda_i e_i e_{n+i} \to \frac{1}{2}i\sum_{1}^{n}\lambda_i P_i Q_i =$$

$$= \frac{1}{2}i\sum_{1}^{n}\lambda_i I_2\otimes\cdots\otimes I_2\otimes PQ\otimes I_2\otimes\cdots\otimes I_2 =$$

$$= \sum_{1}^{n} I_2\otimes\cdots\otimes I_2\otimes\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\lambda_i & \\ & -\frac{1}{2}\lambda_i\end{pmatrix}\otimes I_2\otimes\cdots\otimes I_2.$$

显然 $\sigma=\varphi\tau^{-1}\psi$ 是 B_n 的一个不可約表示，而它的权为 $\frac{1}{2}(\pm\lambda_1\pm\lambda_2\pm\cdots\pm\lambda_n)$. 它們都是单权，这表明 σ 是 B_n 的旋表示。

再研究 D_n. 元素

$$H_{\lambda_1\cdots\lambda_n}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_n & & & \\ & & & -\lambda_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -\lambda_n\end{pmatrix}$$

在 ψ 之下映到

$$\begin{pmatrix} 0 & i\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} \\ -i\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix} & 0\end{pmatrix} = i\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(E_{i\ n+i}-E_{n+i\ i}).$$

在 τ^{-1} 之下它又映到

$$\frac{1}{2}i\sum\lambda_i e_i e_{n+i}.$$

在 φ 之下它又映到

$$\frac{1}{2} i \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i Q_i = \sum_{1}^{n} I_2 \otimes \cdots \otimes I_2 \otimes \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\lambda_i & \\ & -\frac{1}{2}\lambda_i \end{pmatrix} \otimes$$

$$\otimes I_2 \otimes \cdots \otimes I_2.$$

自然，$\sigma = \varphi\tau^{-1}\psi$ 是 D_n 的一个表示，而它的权为 $\frac{1}{2}$（$\pm\lambda_1 \pm \cdots \pm \lambda_n$），它們都是单权. σ 正好分成两个不可約表示之和， 它們分別以 $\frac{1}{2}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$ 和 $\frac{1}{2}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_{n-1} - \lambda_n)$ 为首权. 因此它們是旋表示 σ_1 和 σ_2.

§ 4. 例外单李代数 F_4 和 E_8

設 $\mathfrak{g}$ 是一个单李代数，維数为 r，而 $X_1, \cdots, X_r$ 是它的一組基；并設

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k X_k, \quad i, j = 1, 2, \cdots, r.$$

再設 $\rho: X \to \rho(X)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个不可約表示，表示空間为 V, $\dim V = s$. 設 $E_1, E_2, \cdots, E_s$ 是 V 的一組基，并設

$$\rho(X_i) E_\beta = \sum_{\alpha=1}^{s} d_{\alpha\beta}^i E_\alpha, \quad i = 1, \cdots, r; \quad \beta = 1, \cdots, s.$$

現在造 $\mathfrak{g}$ 和 V 的向量空間直和 $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g} \dotplus V$，則 $X_1, X_2, \cdots, X_r$ 和 $E_1, E_2, \cdots, E_s$ 組成 $\mathfrak{g}_1$ 的一組基，在 $\mathfrak{g}_1$ 中引进一个換位运算

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k X_k, \quad i, j = 1, 2, \cdots, r$$

$$-[E_\beta, X_i] = [X_i, E_\beta] = \sum_{\alpha=1}^{s} d_{\alpha\beta}^i E_\alpha,$$

$$i = 1, 2, \cdots, r; \quad \beta = 1, \cdots, s$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = \sum_{i=1}^{r} d_{\alpha\beta}^i X_i, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \cdots, s.$$

假定 ρ 既不是 0 表示亦不等价于 $\mathfrak{g}$ 的正則表示. 先假定 $\mathfrak{g}_1$ 成一李代数,我們来証明这时 $\mathfrak{g}_1$ 一定是个单代数.

实际上,可将 $\mathfrak{g}_1$ 如下地看作 $\mathfrak{g}$ 的表示空間: 如 $X \in \mathfrak{g}$ 而 $Y + E \in \mathfrak{g}_1$, $Y \in \mathfrak{g}$, $E \in V$。令

$$f(X)(Y + E) = adXY + \rho(X)E,$$

則 f 就是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示, 以 $\mathfrak{g}_1$ 为表示空間. 因 ρ 是和 $\mathfrak{g}$ 的正則表示不等价的不可約表示, 所以表示空間 $\mathfrak{g}_1$ 分解成两个不等价的不可約不变子空間 $\mathfrak{g}$ 与 V 的直和. 設 $\mathfrak{t}$ 是 $\mathfrak{g}_1$ 的一个理想, 則 $\mathfrak{t}$ 是 f 的不变子空間. 因此, $\mathfrak{t}$ 分解成不可約不变子空間的直和. 这只有三种情形: $\mathfrak{t} = \mathfrak{g} + V$, $\mathfrak{t} = \mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{t} = V$. 因 $\rho \neq 0$ 而 ρ 不可約, 故 $\mathfrak{t} = \mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{t} = V$ 都不能发生. 因此一定有 $\mathfrak{t} = \mathfrak{g} + V$, 这証明 $\mathfrak{g}_1$ 是单的.

再研究何时 $\mathfrak{g}_1$ 成李代数.

首先,根据换位运算的反交换性得出

$$d^i_{\alpha\beta} = - d^i_{\beta\alpha}, \quad i = 1, 2, \cdots, r; \alpha, \beta = 1, \cdots, s$$

这就是說 $D_i = \rho(X_i)$ 为斜对称矩陣 ($i = 1, \cdots, r$). 以下我們作此假定.

为了研究 Jacobi 恆等式是否成立,对 $X, Y, Z \in \mathfrak{g}_1$ 引入

$$\{X, Y, Z\} = [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]].$$

显然有

$$\{X_i, X_k, X_l\} = 0.$$

但需要检驗以下关系何时成立:

$$\{X_i, X_k, E_\alpha\} = 0,$$
$$\{X_i, E_\alpha, E_\beta\} = 0,$$
$$\{E_\alpha, E_\beta, E_\gamma\} = 0.$$

首先因 ρ 为表示,我們有

$$\begin{aligned}\{X_i, X_k, E_\alpha\} &= [X_i, [X_k, E_\alpha]] + [X_k, [E_\alpha, X_i]] + [E_\alpha, [X_i, X_k]] = \\ &= \rho(X_i)\rho(X_k)E_\alpha - \rho(X_k)\rho(X_i)E_\alpha - \rho([X_i, X_k])E_\alpha = \\ &= \{[\rho(X_i), \rho(X_k)] - \rho([X_i, X_k])\}E_\alpha = 0.\end{aligned}$$

其次，我們有

$$\{X_i, E_\alpha, E_\beta\}=[X_i,[E_\alpha,E_\beta]]+[E_\alpha,[E_\beta,X_i]]+[E_\beta,[X_i,E_\alpha]]=$$

$$=\left[X_i,\sum_j d^j_{\alpha\beta}X_j\right]-\left[E_\alpha,\sum_\gamma d^i_{\gamma\beta}E_\gamma\right]+\left[E_\beta,\sum_\gamma d^i_{\gamma\alpha}E_\gamma\right]=$$

$$=\sum_{j=1}^r d^j_{\alpha\beta}\sum_k c^k_{ij}X_k-\sum_\gamma d^i_{\gamma\beta}\sum_k d^k_{\alpha\gamma}X_k+\sum_\gamma d^i_{\gamma\alpha}\sum_k d^k_{\beta\gamma}X_k=$$

$$=\sum_k\left(\sum_{j=1}^r d^j_{\alpha\beta}c^k_{ij}-\sum_\gamma d^i_{\gamma\beta}d^k_{\alpha\gamma}+\sum_\gamma d^i_{\gamma\alpha}d^k_{\beta\gamma}\right)X_k. \tag{1}$$

另一方面，将

$$[\rho(X_i),\rho(X_j)]=\sum_k c^k_{ij}\rho(X_k)$$

作用到 E_α 上，我們有

$$[\rho(X_i),\ \rho(X_j)]E_\alpha=\sum_k c^k_{ij}\rho(X_k)E_\alpha,$$

而

$$[\rho(X_i),\rho(X_j)]E_\alpha=\rho(X_i)\rho(X_j)E_\alpha-\rho(X_j)\rho(X_i)E_\alpha=$$

$$=\rho(X_i)\sum_\gamma d^j_{\gamma\alpha}E_\gamma-\rho(X_j)\sum_\gamma d^i_{\gamma\alpha}E_\gamma=$$

$$=\sum_\beta\sum_\gamma d^j_{\gamma\alpha}d^i_{\beta\gamma}E_\beta-\sum_\beta\sum_\gamma d^i_{\gamma\alpha}d^j_{\beta\gamma}E_\beta=$$

$$=\sum_\beta\sum_\gamma(d^j_{\gamma\alpha}d^i_{\beta\gamma}-d^i_{\gamma\alpha}d^j_{\beta\gamma})E_\beta,$$

$$\sum_k c^k_{ij}\rho(X_k)E_\alpha=\sum_k c^k_{ij}\sum_\beta d^k_{\beta\alpha}E_\beta.$$

于是有

$$\sum_\gamma(d^j_{\gamma\alpha}d^i_{\beta\gamma}-d^i_{\gamma\alpha}d^j_{\beta\gamma})=\sum_k c^k_{ij}d^k_{\beta\alpha},$$

亦即

$$\sum_\gamma(d^i_{\gamma\beta}d^k_{\alpha\gamma}-d^i_{\gamma\alpha}d^k_{\beta\gamma})=\sum_j c^j_{ik}d^j_{\beta\alpha}.$$

将它代入(1)得

$$\{X_i, E_\alpha, E_\beta\} = \sum_k \left(\sum_j d^j_{\alpha\beta} c^k_{ij} - \sum_j d^j_{\beta\alpha} c^j_{ik}\right) X_k =$$

$$= \sum_k \left\{\sum_j d^j_{\alpha\beta}(c^k_{ij} + c^j_{ik})\right\} X_k.$$

如果我們假定

$$\mathrm{Tr}\, D_i D_k = -s\delta_{ik}, \qquad (2)$$

則

$$0 = \mathrm{Tr}\,[D_i, D_j D_k] = \mathrm{Tr}\,[D_i, D_j]D_k + \mathrm{Tr}\, D_j[D_i, D_k] =$$

$$= \mathrm{Tr}\sum_l c^l_{ij} D_l D_k + \mathrm{Tr}\, D_j \sum_l c^l_{ik} D_l = -(c^k_{ij} + c^j_{ik})s.$$

于是这时一定有

$$\{X_i, E_\alpha, E_\beta\} = 0.$$

最后

$$\{E_\alpha, E_\beta, E_\gamma\} = [E_\alpha, [E_\beta, E_\gamma]] + [E_\beta, [E_\gamma, E_\alpha]] +$$

$$[E_\gamma, [E_\alpha, E_\beta]] = \left[E_\alpha, \sum_i d^i_{\beta\gamma} X_i\right] +$$

$$+ \left[E_\beta, \sum_i d^i_{\gamma\alpha} X_i\right] + \left[E_\gamma, \sum_i d^i_{\alpha\beta} X_i\right] =$$

$$= -\sum_i d^i_{\beta\gamma} \sum_\delta d^i_{\delta\alpha} E_\delta -$$

$$- \sum_i d^i_{\gamma\alpha} \sum_\delta d^i_{\delta\beta} E_\delta - \sum_i d^i_{\alpha\beta} \sum_\delta d^i_{\delta\gamma} E_\delta =$$

$$= \sum_{i\delta} (d^i_{\beta\gamma} d^i_{\alpha\delta} + d^i_{\gamma\alpha} d^i_{\beta\delta} + d^i_{\alpha\beta} d^i_{\gamma\delta}) E_\delta.$$

置

$$p_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sum_i (d^i_{\beta\gamma} d^i_{\alpha\delta} + d^i_{\gamma\alpha} d^i_{\beta\delta} + d^i_{\alpha\beta} d^i_{\gamma\delta}),$$

于是，如果 $p_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$，則 $\{E_\alpha, E_\beta, E_\gamma\} = 0$，注意，$p_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 对它的足碼 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 而言是交錯的，即，如果 π 是 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 的一个

置換，則

$$p_{\alpha\beta\gamma\delta}=\begin{cases} p_{\pi(\alpha)\pi(\beta)\pi(\gamma)\pi(\delta)}, & \text{如 } \pi \text{ 为偶置換} \\ -p_{\pi(\alpha)\pi(\beta)\pi(\gamma)\pi(\delta)}, & \text{如 } \pi \text{ 为奇置換.} \end{cases}$$

我們有

$$(\mathrm{Tr} D_i D_k)^2 = \left(\sum_{\beta} d^i_{\alpha\beta} d^k_{\beta\alpha}\right)^2 = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} d^i_{\alpha\beta} d^k_{\beta\alpha} d^i_{\gamma\delta} d^k_{\delta\gamma},$$

$$\mathrm{Tr}(D_i D_k)^2 = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} d^i_{\alpha\beta} d^k_{\beta\gamma} d^i_{\gamma\delta} d^k_{\delta\alpha}.$$

于是

$$\sum_{i,k} (\mathrm{Tr}\, D_i D_k)^2 - 2\sum_{i,k} \mathrm{Tr}\,(D_i D_k)^2 =$$

$$= \sum_{i,k} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} d^i_{\alpha\beta} d^i_{\gamma\delta} (d^k_{\beta\alpha} d^k_{\delta\gamma} - 2 d^k_{\beta\gamma} d^k_{\delta\alpha}) =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} p_{\alpha\beta\gamma\delta} \sum_i d^i_{\alpha\beta} d^i_{\gamma\delta} = \frac{1}{3} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} p^2_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

另一方面，根据(2)，

$$\sum_{i,k} (\mathrm{Tr}\, D_i D_k)^2 = rs^2.$$

因此，如果

$$\sum_{i,k} \mathrm{Tr}\,(D_i D_k)^2 = \frac{1}{2} rs^2,$$

而 $D_i = \rho(X_i)(1 \leqslant i \leqslant r)$ 都是实矩陣，則 $p_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$，因而

$$\{E_\alpha, E_\beta, E_\gamma\} = 0.$$

这样我們証明了

定理 5 (E. Witt)[1]. 設 $\mathfrak{g}$ 是单李代数，維数为 r，而 $X_1, X_2, \cdots, X_r$ 是它的一組基. 再設 ρ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个不可約表示，表示空間为 V，V 的維数为 s. 假設相对于 V 的一組基 $E_1, E_2, \cdots, E_s$,

1) E. Witt, Spiegelungsgruppen und Aufzählung halbeinfacher Liescher Ringe, *Abh. Math. Sem. Univ.*, Hamburg., **14** (1941), 289—337.

$\rho(X_i)$ 有矩陣

$$D_i = (d^i_{\alpha\beta})_{1\leq\alpha,\beta\leq s};$$

更假設 ρ 不等价于 0 表示和 $\mathfrak{g}$ 的正則表示，而且

i) $D_i = \rho(X_i)$ 是实的斜对称矩陣，

ii) $\mathrm{Tr}\, D_i D_k = -s\delta_{ik}$，

iii) $\mathrm{Tr} \sum_{i,k} (D_i D_k)^2 = \frac{1}{2} rs^2$.

那么，在以 $X_1, \cdots, X_r, E_1, \cdots, E_s$ 为基所张成的向量空間 $\mathfrak{g}_1$ 中如下地引进换位运算：

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{r} c^k_{ij} X_k \quad i, j = 1, 2, \cdots, r$$

$$-[E_\beta, X_i] = [X_i, E_\beta] = \sum_{\alpha=1}^{S} d^i_{\alpha\beta} E_\alpha \quad i = 1, \cdots, r; \beta = 1, \cdots, S$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = \sum_{i=1}^{r} d^i_{\alpha\beta} X_i, \quad \alpha, \beta = 1, \cdots, s$$

則 $\mathfrak{g}_1$ 是个单李代数.

Witt 利用上述定理給出了例外单李代数 F_4 和 E_8 的存在性的一个証明.

首先討論 F_4. 取一个 8 維向量空間 V_8，以 e_1、$e_2, \cdots, e_8$ 表它的一組基. 造一个 Clifford 代数 $\mathfrak{C}$，它由 $e_1, e_2, \cdots, e_8$ 所生成，而它們适合关系

$$e_i^2 = 1, \qquad i = 1, 2, \cdots, 8$$

$$e_i e_j + e_j e_i = 0, \quad i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, 8.$$

令

$$e_0 = e_1 e_2 \cdots e_8.$$

可以驗証

$$e_0^2 = 1,$$

$$e_0 e_i + e_i e_0 = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, 8,$$

記 $\mathfrak{C}$ 中一切形如

$$\sum_{0\leqslant i<k\leqslant 8} c_{ik}e_ie_k \quad c_{ik} \text{ 为复数}$$

的元素为 $\mathfrak{C}_2'$,则 $\mathfrak{C}_2'$ 組成 $\mathfrak{C}_L$ 的一个子代数;而象定理 3 一样,可証

$$\sum_{0\leqslant i<k\leqslant 8} c_{ik}e_ie_k \overset{\tau}{\longleftrightarrow} 2\sum_{0\leqslant i<k\leqslant 8} c_{ik}(E_{ik}-E_{ki})$$

是 $\mathfrak{C}_2'$ 与 $o(9, C)$ 之間的一个同构对应. 又根据定理 2, $\mathfrak{C}$ 与复数域上 $2^4=16$ 級全矩陣环同构;而在定理 2 中所建立的同构 φ 之下, $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8$ 映到 $P_1, P_2, P_3, P_4, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$。注意 $P_1, P_2, P_3, P_4, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$ 为两两反交換的对合矩陣(卽阶为 2 的矩陣). 因此有可逆矩陣 T 存在,使

$$TP_1T^{-1}=E_1=\begin{pmatrix} I_8 & \\ & -I_8\end{pmatrix},$$

$$TP_2T^{-1}=E_2=\begin{pmatrix} & I_8 \\ I_8 & \end{pmatrix},$$

$$TP_3T^{-1}=E_3=\left(\begin{array}{cc|cc} & & 0 & I_4 \\ & & -I_4 & 0 \\ \hline 0 & -I_4 & & \\ I_4 & 0 & & \end{array}\right),$$

$$TP_4T^{-1}=E_4=\left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 0 & I_2 & & \\ & & & & -I_2 & 0 & & \\ & & & & & & 0 & -I_2 \\ & & & & & & I_2 & 0 \\ \hline 0 & -I_2 & & & & & & \\ I_2 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & I_2 & & & & \\ & & -I_2 & 0 & & & & \end{array}\right),$$

$$TQ_1T^{-1} = E_5 =$$

$$= \left(\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 0 & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & & & -1 & 0 & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & 0 & -1 & & & & \\
 & & & & & & & & & & 1 & 0 & & & & \\
 & & & & & & & & & & & & 0 & -1 & & \\
 & & & & & & & & & & & & 1 & 0 & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & & -1 & 0 \\
0 & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\
1 & 0 & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & 0 & 1 & & & & & & & & & & & & \\
 & & -1 & 0 & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 0 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & & & -1 & 0 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 0 & -1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & 0 & & & & & & & &
\end{array}\right),$$

$$TQ_2T^{-1} = E_6 =$$

$$= \left(\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & & & 0 & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & & & -1 & 0 & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & 0 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & & -1 & 0 \\
 & & & & & & & & 0 & 1 & & & & & & \\
 & & & & & & & & -1 & 0 & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & 0 & 1 & & & & \\
 & & & & & & & & & & -1 & 0 & & & & \\
 & & & & 0 & -1 & & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 0 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 0 & -1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & 0 & & & & & & & & \\
0 & -1 & & & & & & & & & & & & & & \\
1 & 0 & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & 0 & -1 & & & & & & & & & & & & \\
 & & 1 & 0 & & & & & & & & & & & &
\end{array}\right),$$

$$TQ_3T^{-1} = E_7 =$$

$$= \begin{pmatrix}
&&&&&&&&&&&1&&&& \\
&&&&&&&&&&-1&&&&& \\
&&&&&&&&&1&&&&&& \\
&&&&&&&&-1&&&&&&& \\
&&&&&&&&&&&&&&&-1 \\
&&&&&&&&&&&&&&1& \\
&&&&&&&&&&&&&-1&& \\
&&&&&&&&&&&&1&&& \\
&&&-1&&&&&&&&&&&& \\
&&1&&&&&&&&&&&&& \\
&-1&&&&&&&&&&&&&& \\
1&&&&&&&&&&&&&&& \\
&&&&&&&1&&&&&&&& \\
&&&&&&-1&&&&&&&&& \\
&&&&&1&&&&&&&&&& \\
&&&&-1&&&&&&&&&&&
\end{pmatrix},$$

$$TQ_4T^{-1} = E_8 =$$

$$= \begin{pmatrix}
&&&&&&&&&&&&&&&1 \\
&&&&&&&&&&&&&&1& \\
&&&&&&&&&&&&&-1&& \\
&&&&&&&&&&&&-1&&& \\
&&&&&&&&&&&1&&&& \\
&&&&&&&&&&1&&&&& \\
&&&&&&&&&-1&&&&&& \\
&&&&&&&&-1&&&&&&& \\
&&&&&&&-1&&&&&&&& \\
&&&&&&-1&&&&&&&&& \\
&&&&&1&&&&&&&&&& \\
&&&&1&&&&&&&&&&& \\
&&&-1&&&&&&&&&&&& \\
&&-1&&&&&&&&&&&&& \\
&1&&&&&&&&&&&&&& \\
1&&&&&&&&&&&&&&&
\end{pmatrix}.$$

如令

$$X \xrightarrow{\rho_0} TXT^{-1}, \quad X \in M_{16}(C)$$

则 $\rho = \rho_0\varphi$ 仍是将 $\mathfrak{C}$ 映成 $M_{16}(C)$ 的一个同构对应，而这时 $\rho(e_i) = E_i$ $(i = 1, 2, \cdots, 8)$ 都是实的正交矩陣．于是 $\rho(e_0) = E_0$ 也是实的正交矩陣。将 e_je_k 排成一个次序，記作 $X_j(j = 1, 2, \cdots, 36)$．将 ρ 导出的 $\mathfrak{C}_2'$ 的表示仍記作 ρ．因 $\rho(e_i)$ 可表成 $\rho(X_j)$ 的乘积，故 ρ 为不可約．記 $\rho(X_j) = D_j$，則 D_j 实正交．由于 $X_j = e_\lambda e_\mu$，故 $X_j^2 = -1$，于是 $\rho(X_j)^2 = -I$．再从 $\rho(X_j)\rho(X_j)' = I$，导出 $D_j = \rho(X_j)$ 都是反对称矩陣．我們有

$$\mathrm{Tr}\, D_j^2 = \mathrm{Tr}\, \rho(X_j)\rho(X_j) = \mathrm{Tr}\, \rho(e_\lambda e_\mu e_\lambda e_\mu) =$$
$$= \mathrm{Tr}\, \rho(-1) = -16.$$

再設 $X_k = e_\nu e_k$．如 $\mu = \nu$，則

$$\mathrm{Tr}\, D_jD_k = \mathrm{Tr}\, \rho(e_\lambda e_\mu e_\mu e_k) = \mathrm{Tr}\, \rho(e_\lambda e_k) = 0.$$

如 λ, μ, ν, k 两两不同，則 $(e_\lambda e_\mu e_\nu e_k)^2 = 1$。这时也有

$$\mathrm{Tr}\, D_jD_k = 0.$$

于是我們証明了

$$\mathrm{Tr}\, D_jD_k = -\delta_{jk}(16).$$

最后，对于一个給定的 j 計算 $\mathrm{Tr} \sum_{j,k} (D_jD_k)^2$．当 $k = j$ 时 $\mathrm{Tr}\,(D_jD_j)^2 = 16$．設 $D_j = E_\lambda E_\mu$，一共有 14 个 $D_k = E_\nu E_k$ 使足碼 ν, k 中的一个与 λ, μ 中的一个相重，这时 $\mathrm{Tr}\,(D_jD_k)^2 = -16$；还有 21 个 $D_k = E_\nu E_k$ 的足碼 ν, k 与 λ, μ 无共同者，这时

$$\mathrm{Tr}\,(D_jD_k)^2 = \mathrm{Tr}\, I = 16.$$

于是

$$\mathrm{Tr} \sum_{j,k} (D_jD_k)^2 = 36(16 - 16 \cdot 14 + 16 \cdot 21) =$$

$$= 36 \cdot 16 \cdot 8 = \frac{1}{2} 36 \cdot 16^2.$$

这样，$\mathfrak{C}'_2 \approx \mathfrak{o}(9, C)$ 的表示 ρ 就符合定理 5 的条件．因此根据定理 5 可得一单代数 $\mathfrak{g}_1$。显然 $\mathfrak{C}_2$ 的 Cartan 子代数就是 $\mathfrak{g}_1$ 的 Cartan 子代数．因此 $\mathfrak{g}_1$ 的秩为 4．但 $\dim \mathfrak{g}_1 = 36 + 16 = 52$，而 $\dim A_4 = 5^2 - 1 = 24$，$\dim B_4 = \dim C_4 = 36$，$\dim D_4 = 28$，故 $\mathfrak{g}_1$ 不与秩为 4 的典型李代数同构．因此 $\mathfrak{g}_1$ 是以 $\Pi(F_4)$ 为基础根系的李代数．这証明了 F_4 是存在的。

显然，$\mathfrak{o}(9, C)$ 的根系与表示 ρ 的权系合并起来即是 F_4 的根系，而 ρ 为 $\mathfrak{o}(9, C)$ 的旋表示，故 F_4 的根系为

$$\pm\lambda_i, i = 1, 2, 3, 4;\quad \pm\lambda_i \pm \lambda_k, i \neq k, i, k = 1, 2, 3, 4;$$

$$\frac{1}{2}(\pm\lambda_1 \pm \lambda_2 \pm \lambda_3 \pm \lambda_4).$$

再討論 E_8．取一14 維向量空間 V_{14}；以 $e_1, e_2, \cdots, e_{14}$ 表它的一組基．造 V_{14} 的张量代数 T_{14}．在 T_{14} 中考察由以下元素組成的理想 I：

$$\left.\begin{array}{ll} e_i^2 = -1, & i = 1, 2, \cdots, 14 \\ e_i e_j + e_j e_i = 0, & i, j = 1, \cdots, 14, i \neq j. \end{array}\right\} \quad (1)$$

象定理 1 一样，可証 T/I 是一 2^{14} 維的結合代数 $\mathfrak{C}'$，它可看成由 $e_1, \cdots, e_{14}$ 生成而它們适合关系(1)．仿照定理 2 可証 $\mathfrak{C}'$ 与 2^7 級全矩陣代数同构，这时只要取

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

記此同构为 ρ．将 $e_1, e_2, \cdots, e_7$ 改記作 $e_2, e_3, \cdots, e_8$，并将 $e_8, e_9, \cdots, e_{14}$ 改記作 $e_{10}, e_{11}, \cdots, e_{16}$．再令

$$e_9 = e_2 e_3 \cdots e_8 e_{10} e_{11} \cdots e_{16},$$

則

$$e_9^2 = -1,$$

$$e_9 e_i + e_i e_9 = 0, \quad i = 2, 3, \cdots, 8, 10, 11, \cdots, 16.$$

記 $\mathfrak{C}'$ 中一切形如

$$\sum_{i=2}^{16} a_i e_i + \sum_{2 \leqslant i < k \leqslant 16} c_{ik} e_i e_k, \quad a_i, c_{ik} \text{ 为复数}$$

的元素为 $\mathfrak{C}'_{12}$，則 $\mathfrak{C}'_{12}$ 組成 $\mathfrak{C}'_{2}$ 的一个子代数，而象定理 4 一样可証

$$\sum_{i=2}^{16} a_i e_i + \sum_{2\leqslant i<k\leqslant 16} c_{ik} e_i e_k \xrightarrow{\tau} 2\sum_{i=2}^{16} a_i (E_{1i} - E_{i1}) -$$

$$- 2 \sum_{2\leqslant i<k\leqslant 16} c_{ik}(E_{ik} - E_{ki})$$

是 $\mathfrak{C}'_{12}$ 与 $\mathfrak{o}(16, C)$ 之間的一个同构．令

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} I_8 & \frac{1}{\sqrt{2}} I_8 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} I_8 & \frac{i}{\sqrt{2}} I_8 \end{pmatrix}.$$

再以 ψ 表示从 D_8 映入 $\mathfrak{o}(16, C)$ 的同构：

$$X \xrightarrow{\psi} PXP^{-1},$$

于是 $\varphi\tau^{-1}\psi$ 就是 D_8 的一个表示．我們来計算这个表示的权．元素

$$H_{\lambda_1\cdots\lambda_8} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_8 & & & \\ & & & -\lambda_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -\lambda_8 \end{pmatrix}$$

在 ψ 之下映到

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_8 \end{pmatrix} \\ -\sqrt{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_8 \end{pmatrix} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \sqrt{-1} \sum_{i=1}^{8} \lambda_i (E_{i,8+i} - E_{8+i,i});$$

在 τ^{-1} 之下，

$$\sqrt{-1} \sum_{i=1}^{8} \lambda_i (E_{i,8+i} - E_{8+i,i}) \to \frac{\sqrt{-1}}{2}\lambda_1 e_9 - \frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i=2}^{8} \lambda_i e_i e_{8+i};$$

在 φ 之下,

$$\frac{\sqrt{-1}}{2}\lambda_1 e_9-\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i=2}^{8}\lambda_i e_i e_{8+i}\to\frac{\sqrt{-1}}{2}\lambda_1\varphi(e_9)-$$

$$-\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i=2}^{8}\lambda_i P_{i-1}Q_{i-1},$$

其中 $P_{i-1}=\varphi(e_i)$, $Q_{i-1}=\varphi(e_{8+i})$, $i=2,3,\cdots,8$. 我們有

$$\frac{\sqrt{-1}}{2}\lambda_1\varphi(e_9)-\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i=2}^{8}\lambda_i P_{i-1}Q_{i-1}=$$

$$=\frac{\sqrt{-1}}{2}\lambda_1 P_1\cdots P_7 Q_1\cdots Q_7-$$

$$-\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i=2}^{8}\lambda_i I_2\otimes\cdots\otimes I_2\otimes \underset{(\text{第 } i-1 \text{ 位置})}{PQ}\otimes I_2\otimes\cdots\otimes I_2=$$

$$=-\frac{\sqrt{-1}}{2}\lambda_1\begin{pmatrix}\sqrt{-1}&0\\0&-\sqrt{-1}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}\sqrt{-1}&0\\0&-\sqrt{-1}\end{pmatrix}\otimes$$

$$\otimes\cdots\otimes\begin{pmatrix}\sqrt{-1}&0\\0&-\sqrt{-1}\end{pmatrix}-$$

$$-\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum_{i=2}^{8}\lambda_i I_2\otimes\cdots\otimes I_2\otimes\begin{pmatrix}\sqrt{-1}&0\\0&-\sqrt{-1}\end{pmatrix}\otimes I_2\otimes\cdots\otimes I_2=$$

$$=-\frac{1}{2}\lambda_1\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\otimes\cdots\otimes\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{8}\lambda_i I_2\otimes\cdots\otimes I_2\otimes\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\otimes I_2\otimes\cdots\otimes I_2.$$

因此 $\varphi\tau^{-1}\psi$ 是 D_8 的以 $\frac{1}{2}(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_7-\lambda_8)$ 为首权的不可約表示.

由于 $P_1, P_2, \cdots, P_7, Q_1, Q_2, \cdots, Q_7$ 是两两反交换的矩陣,并适合

$$P_i^2=Q_i^2=-I,\quad (i=1,2,\cdots,7).$$

和 F_4 的情形相仿，可以証明有 $2^7 \times 2^7$ 可逆矩陣 T 存在，使[1]

$$TP_1T^{-1} = \begin{pmatrix} & I_{64} \\ -I_{64} & \end{pmatrix},$$

$$TP_2T^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} & I_{32} & & \\ -I_{32} & & & \\ \hline & & & -I_{32} \\ & & I_{32} & \end{array}\right),$$

$$TP_3T^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} & I_{16} & & & & & & \\ -I_{16} & & & & & & & \\ \hline & & & -I_{16} & & & & \\ & & I_{16} & & & & & \\ \hline & & & & & -I_{16} & & \\ & & & & I_{16} & & & \\ \hline & & & & & & & I_{16} \\ & & & & & & -I_{16} & \end{array}\right),$$

$$TP_4T^{-1} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} & & & I_{16} & & & & \\ & & -I_{16} & & & & & \\ & I_{16} & & & & & & \\ -I_{16} & & & & & & & \\ \hline & & & & & & & -I_{16} \\ & & & & & & I_{16} & \\ & & & & & -I_{16} & & \\ & & & & I_{16} & & & \end{array}\right),$$

$$TP_5T^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} & & & & & & I_{16} & \\ & & & & & & & -I_{16} \\ \hline & & & & -I_{16} & & & \\ & & & & & I_{16} & & \\ \hline & & I_{16} & & & & & \\ & & & -I_{16} & & & & \\ \hline -I_{16} & & & & & & & \\ & I_{16} & & & & & & \end{array}\right),$$

1）这里列举的 14 个矩陣的具体形状是李根道同志算出的。

$$
TP_6T^{-1}=\left(\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} & I_{16} \\ -I_{16} & \end{array} & \\ \hline & \begin{array}{cc} & I_{16} \\ -I_{16} & \end{array} \end{array} \\ \hline
\begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} & I_{16} \\ -I_{16} & \end{array} & \\ \hline & \begin{array}{cc} & I_{16} \\ -I_{16} & \end{array} \end{array} &
\end{array}\right),
$$

$$
TP_7T^{-1}=\left(\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} E_8 & \\ & -E_8 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} -E_8 & \\ & E_8 \end{array} & \end{array} \\ \hline
\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} E_8 & \\ & -E_8 \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} -E_8 & \\ & E_8 \end{array} & \end{array} &
\end{array}\right),
$$

$$
TQ_iT^{-1}=\left(\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} E_i & \\ & -E_i \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} -E_i & \\ & E_i \end{array} & \end{array} \\ \hline
\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} E_i & \\ & -E_i \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} -E_i & \\ & E_i \end{array} & \end{array} &
\end{array}\right),
$$

$$(i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7),$$

其中 $E_i^2=I$ 而 $E_iE_j=-E_jE_i$. 因而可取 227—229 頁上的八个矩陣作为这里的 $E_1, E_2, \cdots, E_8$. 这样, TP_iT^{-1} 和 TQ_iT^{-1} $(i=1, 2, \cdots, 7)$ 都是实正交矩陣. 如令

$$X \xrightarrow{\rho_0} TXT^{-1}, \quad X\in M_{2^7}(C)$$

则 $\rho=\rho_0\varphi$ 仍是将 $\mathfrak{C}'$ 映成 $M_{128}(C)$ 的一个同构对应，而这时 $\rho(e_i)(2\leqslant i\leqslant 16)$ 都是实正交矩陣．仿前可証 $\rho(e_ie_k)$ $(2\leqslant i<k\leqslant 16)$ 也都是实正交矩陣．将 e_i, e_ie_k 排一次序，記作 $X_j(j=1, 2,\cdots, 120)$，記 $\rho(X_j)=D_j$，則 D_j 皆实正交斜对称矩陣．象 F_4 的情形一样，經計算得

$$\mathrm{Tr}\, D_j^2=-2^7,$$

$$\mathrm{Tr}\, D_jD_k=0,$$

$$\mathrm{Tr}\sum_{j,k}(D_jD_k)^2=\frac{1}{2}120\cdot(2^7)^2.$$

这样 $\mathfrak{C}'_{12}\approx \mathfrak{o}(16, C)$ 的表示 ρ 就符合定理 5 的条件．于是根据定理 5 可得一单代数 $\mathfrak{g}_1$．显然 $\mathfrak{o}(16, C)$ 的 Cartan 子代数卽是 $\mathfrak{g}_1$ 的 Cartan 子代数，这証明了 $\mathfrak{g}_1$ 的秩为 8．但 $\dim\mathfrak{g}_1=120+2^7=248$，而 $\dim A_8=9^2-1=80$，$\dim B_8=\dim C_8=136$，$\dim D_8=120$，所以 $\mathfrak{g}_1$ 不与秩为 8 的典型李代数同构．因此 $\mathfrak{g}_1$ 是以 $\Pi(E_8)$ 为基础根系的单李代数，这証明了 E_8 是存在的．易見 D_8 的根系与 ρ 的权系合在一起卽为 E_8 的根系，因此 E_8 的根系是

$$\pm\lambda_i\pm\lambda_k\quad(i\neq k, i, k=1, 2,\cdots, 8)$$

$$\frac{1}{2}(\pm\lambda_1\pm\lambda_2\pm\cdots\pm\lambda_8)\text{（其中仅出現奇数个負号）}.$$

第十三章 Poincaré-Birkhoff-Witt 定理及其对半单李代数的表示論的应用

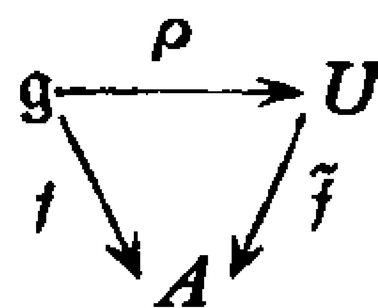
§ 1. 李代数的通用包絡代数

設 $\mathfrak{g}$ 是复数域上的一个李代数而 A 是复数域上的一个具单位元素的結合代数. 設 f 是从 $\mathfrak{g}$ 映入 A 的一个表示. 我們說 A 是 $\mathfrak{g}$ 的一个包絡代数(相对于表示 f), 如果一切 $f(X)$, $X\in\mathfrak{g}$, 及 1 生成 A,卽 A 中包有 1 和一切 $f(X)$, $X\in\mathfrak{g}$,的最小子代数就是 A. 自然, 如 X_1, X_2, $\cdots$, X_r 是 $\mathfrak{g}$ 的一組基, 則 A 是 $\mathfrak{g}$ 的一个包絡代数, 当且仅当 $f(X_1)$, $f(X_2)$, $\cdots$, $f(X_r)$及 1 生成 A.

$\mathfrak{g}$ 的一个包絡代数 U(相对于表示 ρ) 称为一个通用包絡代数(相对于表示 ρ), 如果对于 $\mathfrak{g}$ 的任一包絡代数 A (相对于表示 f), 总有一个从 U 映到 A 之上的同态 $\tilde{f}$ 存在,使

$$\tilde{f}\circ\rho = f,$$

$$\tilde{f}(1) = 1$$



后一等式左端的 1 系指 U 的单位元素, 而右端的 1 系指 A 的单位元素. 由于后一条件成立,故 $\tilde{f}$ 为么同态.

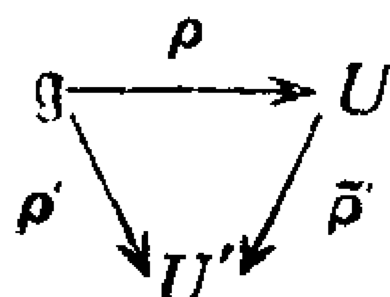
定理 1. 設 $\mathfrak{g}$ 是个李代数, 則 $\mathfrak{g}$ 恆有一个通用包絡代数存在, 而且 $\mathfrak{g}$ 的任意两个通用包絡代数 U 和 U'(分別相对于表示 ρ 和 ρ') 是同构的. 可建立 U 和 U' 間的一个同构使

$$\rho(X)\to\rho'(X)\quad 对一切 X\in\mathfrak{g}.$$

証. 先証唯一性. 将 U 看作 $\mathfrak{g}$ 的通用包絡代数(相对于 ρ),而将 U' 看作一个包絡代数(相对于 ρ'), 則有从 U 映上 U' 的同态 $\tilde{\rho}'$ 存在,使

$$\tilde{\rho}'\circ\rho = \rho',$$

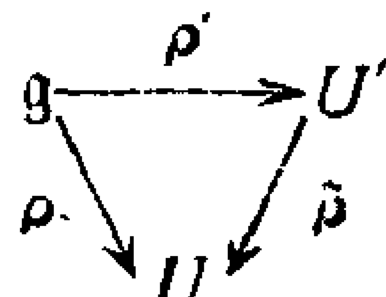
$$\tilde{\rho}'(1) = 1.$$



又将 U' 看作 $\mathfrak{g}$ 的通用包絡代数（相对于 ρ'）而将 U 看作一个包絡代数（相对于 ρ），則有从 U' 映上 U 的同态 $\tilde{\rho}$ 存在，使

$$\tilde{\rho}\circ\rho' = \rho,$$

$$\tilde{\rho}(1) = 1.$$



設 $X_1, \cdots, X_r$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一組基，于是

$$\tilde{\rho}\circ\tilde{\rho}'(\rho(X_i)) = \tilde{\rho}\circ\tilde{\rho}'\circ\rho(X_i) = \tilde{\rho}\circ\rho'(X_i) = \rho(X_i),$$

$$\tilde{\rho}\circ\tilde{\rho}'(1) = 1,$$

因 U 由 1 及 $\rho(X_1), \cdots, \rho(X_r)$ 所生成，这証明 $\tilde{\rho}\circ\tilde{\rho}'$ 是 U 上的恆同映射．同样可証 $\tilde{\rho}'\circ\tilde{\rho}$ 是 U' 上的恆同映射．因此 $\tilde{\rho}'$ 将 U 同构地映到 U' 之上，而

$$\tilde{\rho}'(\rho(X)) = \rho'(X), \qquad X\in\mathfrak{g}.$$

再証存在性．选 $\mathfrak{g}$ 的一組基 $X_1, \cdots, X_r$．造 $\mathfrak{g}$ 的张量代数 T．T 中形如

$$X_i\otimes X_j - X_j\otimes X_i - [X_i, X_j] \quad 1\leqslant i,\ j\leqslant r$$

的元素在 T 中生成一个理想，記作 J．从 $\mathfrak{g}$ 映入 T 的恆同映射

$$\Sigma a_iX_i \to \Sigma a_iX_i$$

导出从 $\mathfrak{g}$ 映入商代数 T/J 的一个映射 ρ：

$$\Sigma a_iX_i \xrightarrow{\rho} \Sigma a_iX_i + J.$$

我們来証明代数 T/J（相对于映射 ρ）是 $\mathfrak{g}$ 的一个通用包絡代数．易見，ρ 是将 $\mathfrak{g}$ 映入 T/J 的一个表示．由于 $1, X_1, X_2, \cdots, X_r$ 是 T 的一組生成元，故 $1,\ \rho(X_1), \cdots, \rho(X_r)$ 是 T/J 的一組生成元．这証明 T/J（相对于表示 ρ）是 $\mathfrak{g}$ 的一个包絡代数．

再設 A 是 $\mathfrak{g}$ 的任一包絡代数（相对于将 $\mathfrak{g}$ 映入 A 的表示 f）．先将 f 扩充成从 T 映入 A 的一个么同态映射 f^0：

$$f^0(X_{i_1}\otimes X_{i_2}\otimes\cdots\otimes X_{i_k}) = f(X_{i_1})f(X_{i_2})\cdots f(X_{i_k}),\quad f^0(1) = 1.$$

因 f 为一表示，故

$$f^0(X_i \otimes X_j - X_j \otimes X_i - [X_i, X_j])$$
$$= f(X_i)f(X_j) - f(X_j)f(X_i) - f([X_i, X_j]) = 0.$$

因此 f^0 将 J 映到 0．这样，f^0 就导出从 T/J 映入 A 的一个同态 $\bar{f}$:

$$\bar{f}(X_{i_1} \otimes X_{i_2} \otimes \cdots \otimes X_{i_k} + J) = f(X_{i_1}) \cdots f(X_{i_k}).$$

自然有

$$\bar{f} \circ \rho = f, \qquad \bar{f}(1) = 1.$$

又因 $f(X_1), \cdots, f(X_r)$ 和 1 生成 A，故 $\bar{f}$ 是映上的．这就証明了 T/J 是 $\mathfrak{g}$ 的一个通用包絡代数．

这就完成了定理 1 的証明．

基于定理 1，我們通常把李代数的通用包絡代数認为是唯一的．

§ 2. Poincaré-Birkhoff-Witt 定理

設 $\mathfrak{g}$ 是一李代数，$U = T/J$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个通用包絡代数（相对于表示 ρ）．設 $X \in \mathfrak{g}$，記 $\rho(X) = \underline{X}$．再設 $X_1, X_2, \cdots, X_r$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一組基，于是有

定理 2 (Poincaré-Birkhoff-Witt[1])． 元素

$$\underline{X}_{i_1}\underline{X}_{i_2}\cdots\underline{X}_{i_p},\ 1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_p \leqslant r \text{ 而 } p = 0, 1, 2, \cdots \quad (1)$$

組成 U 的一組基．

証（Iwasawa）．1）我們先証明形如(1)的元素綫性地生成 U．我們把 U 中形如(1)的元素的复系数倍称为 p 次标准单項式，而它們的綫性組合称为标准多項式，并定义它的次数为单項式中的最高次数．記 T 的子空間 $\sum_{i<p} T_i$ 在自然同态 $T \to U = T/J$ 之下的

---

1) 見 H. Poincaré, Quelques remarques sur les groupes finis et continus, Oeuvres complétes, Tom III, Paris, 1954. G. Birkhoff, Representations of Lie algebras and Lie groups by matrices, *Ann. Math.*, **38** (1937), 526—532. E. Witt, Treue Darstellung Liescher Ringe, *Jour. reine angew. Math.*, **177** (1937), 152—160.

象为 F_p. 因此要証明形如(1)的元素綫性地生成 U，只要証明 F_p 对任一 $p=0,1,2,\cdots$ 由一切 p 次标准多项式組成即可. 我們用归納法証明这一事实. 显然，F_p 由一切

$$\underline{X}_{i_1}\underline{X}_{i_2}\cdots\underline{X}_{i_k}\quad 1\leqslant i_1,i_2,\cdots,i_k\leqslant r\quad 而\ k=0,1,2,\cdots,p$$

綫性地生成. 因此只須証明下面的引理.

引理 1. 設 π 是 $1,2,\cdots,p$ 的一个置換，則

$$\underline{X}_{i_1}\underline{X}_{i_2}\cdots\underline{X}_{i_p}-\underline{X}_{i_{\pi(1)}}\underline{X}_{i_{\pi(2)}}\cdots\underline{X}_{i_{\pi(p)}}\in F_{p-1}.$$

因任一置換都可表成对换之积，所以要証明引理 1，只要对 π 是对换 $(j,j+1)$ 的情形証明即可. 我們有

$$X_{i_j}\otimes X_{i_{j+1}}-X_{i_{j+1}}\otimes X_{i_j}\equiv[X_{i_j},X_{i_{j+1}}]=\Sigma c^k_{i_j i_{j+1}}X_k(\text{mod }J).$$

于是

$$\underline{X}_{i_j}\underline{X}_{i_{j+1}}-\underline{X}_{i_{j+1}}\underline{X}_{i_j}=\sum_k c^k_{i_j\,i_{j+1}}\underline{X}_k,$$

由此即推出

$$\underline{X}_{i_1}\cdots\underline{X}_{i_{j-1}}\underline{X}_{i_j}\underline{X}_{i_{j+1}}\underline{X}_{i_{j+2}}\cdots\underline{X}_{i_p}-\underline{X}_{i_1}\cdots\underline{X}_{i_{j-1}}\underline{X}_{i_{j+1}}\underline{X}_{i_j}\underline{X}_{i_{j+2}}\cdots\underline{X}_{i_p}$$
$$=\Sigma c^k_{i_j i_{j+1}}\underline{X}_{i_1}\cdots\underline{X}_{i_{j-1}}\underline{X}_k\underline{X}_{i_{j+2}}\cdots\underline{X}_{i_p}\in F_{p-1}.$$

2) 进一步我們証明所有形如(1)的元素綫性无关. 为此引进 C 上 r 个未定元 $x_1,\cdots,x_r$ 的多項式环 $P=C[x_1,\cdots,x_r]$，P 可看作 C 上的一个无限維向量空間. 如 I 表足碼 $i_1,i_2,\cdots,i_p$ 的叙列，記 $x_I=x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_p}$，$\underline{X}_I=\underline{X}_{i_1}\underline{X}_{i_2}\cdots\underline{X}_{i_p}$. 我們叙述

引理 2. 存在一个 $\mathfrak{g}$ 的表示 f，以 P 为表示空間，并具性質

$$f(X_i)x_I=x_ix_I.$$

如 $i\leqslant I$（这意思是説，对一切 $k\in I$，$i\leqslant k$).

我們先指出利用引理 2 立刻可以完成定理 2 的証明.

首先根据通用包絡代数的定义，有 U 的一个表示 $\bar{f}$ 存在，具性質

$$\bar{f}\circ\rho(X)=f(X)\qquad\qquad 对一切\ X\in\mathfrak{g},$$
$$\bar{f}(1)=1,$$

右方的 1 表 P 上的恆同变換.

現在設 $I=\{i_1,i_2,\cdots,i_p\}$ 是一非降的足碼叙列，即 $i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_p$，那么根据引理 2，对 p 用归納法，有

$$f(\underline{X}_I)\cdot 1 = x_I,$$

式中 1 表 P 的单位元．由此即可导出当 I 跑过足碼 1，2，…，r 的一切有限非降序列时，元素 $\underline{X}_I$ 綫性无关，因为这时元素 x_I 是 P 中綫性无关的元素．

3）剩下来要証明引理 2．在多項式环 P 中，以 P_p 表 p 次齐次多項式湊上 0 之后所組成的綫性子空間，并置 $Q_p=\sum_{i\leqslant p}P_i$，于是引理 2 就是下面这个递推的命題的直接推論．

(Γ_p) 对于每个非負整数 p，都存在一个从向量空間的 Kronecker 积 $\mathfrak{g}\otimes Q_p$ 映入 P 的向量空間的同态 ψ，且具有以下性質：

$$\psi(X_i\otimes x_I)=x_ix_I,\ i\leqslant I,\ x_I\in Q_p, \tag{1}$$

$$\psi(X_i\otimes x_I)\in Q_{q+1},\ x_I\in Q_q,\ q<p, \tag{2}$$

$$\psi(X_i\otimes\psi(X_j\otimes x_J))=\psi(X_j\otimes\psi(X_i\otimes x_J))+\psi([X_i,X_j]\otimes x_J),\ x_J\in Q_{p-1}, \tag{3}$$

$$\psi(X_i\otimes x_I)-x_ix_I\in Q_q,\ x_I\in Q_q,\ q\leqslant p, \tag{4}$$

其中 I，J 为足碼 1,2，…，r 的任一符合(1)—(4)中要求的序列．

如对 $p=0,1,2,\cdots$，(Γ_p)都成立，那么对 $X=\sum_i c_iX_i\in\mathfrak{g}$ ($c_i\in C$)及 P 中任一多項式 Σa_Ix_I，($a_I\in C$)，命

$$f(X)\Sigma a_Ix_I=\Sigma c_ia_I\psi(X_i\otimes x_I),$$

于是根据(3)，f 就是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示，表示空間为 P。再根据(1)，f 就具有引理 2 所要求的性质．

4）现在我們来証明(Γ_p)．首先注意(2)是(4)的推論，但我們写出(2)是为了清楚的看到(3)中諸項是有定义的．

当 $p=0$ 时，由于条件(1)必須規定 $\psi(X_i\otimes 1)=x_i$，这时条件(2)，(3)，(4)自然成立．

設(Γ_{p-1})对某个 $p>0$ 成立．我們要証明适合(Γ_{p-1})的映射 ψ 有唯一的一个拓广(仍記作 ψ)适合(Γ_p)，这时我們必須对长为 p 的足碼序列 I 来規定 $\psi(X_i\otimes x_I)$．因 P 交換，故当 I 跑过长为 p 的递增足碼序列时，x_I 就綫性地生成 P_p．于是只要考察长为 p 的递

增足碼序列 I 即可. 当 $i \leqslant I$ 时, 由条件(1)知, 必須規定 $\psi(X_i \otimes x_I) = x_i x_I$. 如果 $i \leqslant I$ 不成立, 那么記序列 I 中第一个足碼为 j (当然它可能不只出現在 I 中一次). 将 I 中除去一个 j 之后所得足碼序列記作 J, 則 $i > j \leqslant J$. 于是 $x_I = x_j x_J = \psi(X_j \otimes x_J)$, 这时条件(3)的左方是 $\psi(X_i \otimes x_I)$. 为了利用(3)来規定 $\psi(X_i \otimes x_I)$, 需要(3)式右方的两項均定义. 如此, 利用(4), 写

$$\psi(X_i \otimes x_J) = x_i x_J + w, \quad w \in Q_{p-1}$$

于是(3)式右方成为

$$x_j x_i x_J + \psi(X_j \otimes w) + \psi([X_i, X_j] \otimes x_J),$$

其中每一項都是有定义的. 这样就在所有情形都定义了 ψ, 而(1), (2), (4)显然成立. 至于(3), 我們只知道它当 $i > j \leqslant J$ 时成立. 由于 $[X_i, X_j]$ 的反对称性, 所以(3)当 $j > i \leqslant J$ 时也成立. 又, 当 $i = j$ 时, (3)显然成立. 因此, 我們已知当 $i \leqslant J$ 或 $j \leqslant J$ 时(3)都成立. 以下我們証明(3)在其余情形也成立.

設 $i \leqslant J$ 和 $j \leqslant J$ 都不成立. 这时 J 一定有正的长度, 而且如以 k 表 J 中第一个足碼, 以 L 表 J 中除去 k 后所得足碼序列, 則 $k \leqslant L$, $k < i$, $k < j$. 那么根据归納假設, 有

$$\begin{aligned}\psi(X_j \otimes x_J) &= \psi(X_j \otimes \psi(X_k \otimes x_L)) = \\ &= \psi(X_k \otimes \psi(X_j \otimes x_L)) + \psi([X_j, X_k] \otimes x_L) \\ &= \psi(X_k \otimes x_j x_L) + \psi(X_k \otimes w) + \psi([X_j, X_k] \otimes x_L),\end{aligned}$$

其中 $w = \psi(X_j \otimes x_L) - x_j x_L \in Q_{p-2}$. 将上式与 X_i 作张量积, 然后再作用于 ψ 就有

$$\psi(X_i \otimes \psi(X_j \otimes x_J)) = \psi(X_i \otimes \psi(X_k \otimes x_j x_L)) + \\ \psi(X_i \otimes \psi(X_k \otimes w)) + \psi(X_i \otimes \psi([X_j, X_k] \otimes x_L)).$$

因 $k \leqslant j$, L, 故(3)可应用到上式右方第一項上; 再根据归納法假設, 将(3)式用到上式右方后两項上, 得

$$\psi(X_i \otimes \psi(X_j \otimes x_J)) = \psi(X_k \otimes \psi(X_i \otimes \psi(X_j \otimes x_L))) + \quad (5) \\ \psi([X_i, X_k] \otimes \psi(X_j \otimes x_L)) + \psi([X_j, X_k] \otimes \psi(X_i \otimes x_L)) + \\ \psi([X_i, [X_j, X_k]] \otimes x_L).$$

由于我們的假設对 i, j 对称，故也有

$$\psi(X_j\otimes\psi(X_i\otimes x_J)) = \psi(X_k\otimes\psi(X_j\otimes\psi(X_i\otimes x_L)))+ \quad (6)$$
$$\psi([X_j, X_k]\otimes\psi(X_i\otimes x_L)) + \psi([X_i, X_k]\otimes\psi(X_j\otimes x_L)) +$$
$$\psi([X_j,[X_i, X_k]]\otimes x_L)$$

从(5)式减去(6)式得

$$\psi(X_i\otimes\psi(X_j\otimes x_J)) - \psi(X_j\otimes\psi(X_i\otimes x_J)) = \quad (7)$$
$$\psi(X_k\otimes\{\psi(X_i\otimes\psi(X_j\otimes x_L)) - \psi(X_j\otimes\psi(X_i\otimes x_L))\} +$$
$$\psi([X_i,[X_j, X_k]]\otimes x_L) - \psi([X_j, [X_i, X_k]]\otimes x_L).$$

再利用(3)

$$\psi(X_k\otimes\{\psi(X_i\otimes\psi(X_j\otimes x_L)) - \psi(X_j\otimes\psi(X_i\otimes x_L))\})$$
$$= \psi(X_k\otimes\psi([X_i, X_j]\otimes x_L))$$
$$= \psi([X_i, X_j]\otimes\psi(X_k\otimes x_L)) + \psi([X_k,[X_i, X_j]]\otimes x_L).$$

将此式代入(6)，利用 Jacobi 恆等式得

$$\psi(X_i\otimes\psi(X_j\otimes x_J)) - \psi(X_j\otimes\psi(X_i\otimes x_J)) = \psi([X_i, X_j]\otimes x_J).$$

这就是所要証明的.

这就完全証明了定理 2.

由定理 2 推出

系理. 設 $\mathfrak{g}$ 为李代数，U 是它的一个通用包絡代数(相对于映射 ρ)，則 ρ 将 $\mathfrak{g}$ 一一地映入 U.

于是，以后为符号簡单起見，对一切 $X \in \mathfrak{g}$ 我們記 $\rho(X) = X$，并記 $\rho = i$，称 i 将 $\mathfrak{g}$ 嵌入 U.

§3. 对半单李代数的表示的应用

設 $\mathfrak{g}$ 为复半单李代数，$\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数，Σ 为 $\mathfrak{h}$ 的根系，而 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 为一組基础根系. 利用这組基础根系，在 $\mathfrak{h}$ 中引进一个偏序，以 Σ_+ 表相对于这个偏序的正根的全体.

我們有 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 分解：

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha\in\Sigma} \mathfrak{g}^{\alpha}.$$

令

$$\mathfrak{g}_+ = \sum_{\alpha>0} \mathfrak{g}^\alpha, \quad \mathfrak{g}_- = \sum_{\alpha<0} \mathfrak{g}^\alpha, \quad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h} + \mathfrak{g}_+,$$

則 $\mathfrak{g}_+$ 和 $\mathfrak{g}_-$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的幂零子代数，$\mathfrak{g}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 的可解子代数，而

$$[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0] = [\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_0] = \mathfrak{g}_+.$$

我們还有

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \dotplus \mathfrak{g}_+ \dotplus \mathfrak{g}_- = \mathfrak{g}_- + \mathfrak{g}_0.$$

易見，$\mathfrak{g}_+$ 由 $\mathfrak{g}^{\alpha_i}(i = 1, 2, \cdots, n)$所生成，而 $\mathfrak{g}_-$ 由 $\mathfrak{g}^{-\alpha_i}(i = 1, 2, \cdots, n)$所生成。

对每个 $\alpha \in \Sigma$，我們有 $H_\alpha \in \mathfrak{h}$ 使

$$(H, H_\alpha) = \alpha(H) \qquad \text{对一切 } H \in \mathfrak{h}.$$

置

$$H_i = \frac{2H_{\alpha_i}}{(\alpha_i, \alpha_i)}, \qquad i = 1, 2, \cdots, n,$$

則

$$\alpha_i(H_i) = 2.$$

令

$$\alpha_i(H_j) = \frac{2(H_{\alpha_i}, H_{\alpha_j})}{(\alpha_j, \alpha_j)} = -a_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n,$$

則 a_{ji} 为整数(实际上，$a_{ji} = q - p$，而 q，p 为最大非負整数使 $\alpha_i - p\alpha_j, \alpha_i - (p-1)\alpha_j, \cdots, \alpha_i - \alpha_j, \alpha_i, \alpha_i + \alpha_j, \cdots, \alpha_i + q\alpha_j$ 都是根而 $\alpha_i - (p+1)\alpha_j$ 与 $\alpha_i + (q+1)\alpha_j$ 都不是根)。自然有

$$a_{ii} = -2.$$

$\{a_{ij}\}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$称为 Cartan 整数組。易見，两組基础根系(分属不同的半单代数)如有相同的 Cartan 整数組，則它們一定合同，而且反之亦然。于是有

定理 3. 两个复半单代数同构当且仅当它們有相同的 Cartan 整数組。

可以选取 $X_i \in \mathfrak{g}^{\alpha_i}$，$Y_i \in \mathfrak{g}^{-\alpha_i}$ 使

$$[X_i, Y_i] = H_i,$$

于是 $H_1, \cdots, H_n, X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_n$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一組生成元，称**标准生成元**. 它們适合以下关系:

$$[H_i, H_j] = 0,$$
$$[H_i, X_j] = -a_{ij}X_j,$$
$$[H_i, Y_j] = a_{ij}Y_j,$$
$$[X_i, Y_i] = H_i,$$
$$[X_i, Y_j] = 0, \quad \text{如 } i \neq j.$$

当然，它們还可能适合一些其他关系.

設 ω 是 $\mathfrak{g}$ 的某一不可約表示的权，則

$$\omega(H_i) = \frac{2\omega(H_{\alpha_i})}{(\alpha_i, \alpha_i)} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

是整数. 如 ω_0 是首权，則 $\omega(H_i)$是 $\geqslant 0$ 的整数. 反之，設 $\omega_0 \in \mathfrak{h}_0^*$，如 $\omega_0(H_i)$是 $\geqslant 0$ 的整数，則称 ω_0 为支配整綫性函数. 今将証明

定理 4. 对于复半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的任一支配整綫性函数 ω_0，皆有 $\mathfrak{g}$ 的一个不可約表示存在，它以 ω_0 为首权.

証 (Harish-Chandra[1]). 証明分以下几步进行.

1) 我們有

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- + \mathfrak{g}_0.$$

以 U, U_- 和 U_0 分别表 $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_-$ 和 $\mathfrak{g}_0$ 的通用包絡代数. 对每个 $\alpha \in \Sigma_+$，选 $X_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$, $X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}^{-\alpha}$(当 $\alpha = \alpha_i$ 时，取 $X_\alpha = X_i$, $X_{-\alpha} = Y_i$). 于是 $X_\alpha, X_{-\alpha}(\alpha \in \Sigma)$及 $H_1, \cdots, H_n$ 就組成 $\mathfrak{g}$ 的一組基. 将这組基排一次序，先任意排 $X_{-\alpha}(\alpha \in \Sigma_+)$，再排 $H_1, H_2, \cdots, H_n$，最后任意排 $X_\alpha(\alpha \in \Sigma_+)$. 于是，$U$ 就是它們的标准多項式的全体，U_- 是 $X_{-\alpha}(\alpha \in \Sigma_+)$的标准多項式的全体，而 U_0 是 $H_1, \cdots, H_n, X_\alpha(\alpha \in \Sigma)$ 的标准多項式的全体. 根据 Poincaré-Birkhoff-Witt 定理，我們推出 U 作为向量空間与 U_- 和 U_0 的 Kronecker 积同构. 因此，不仿将 U 与 $U_- \otimes U_0$ 視为同一，記 $U = U_- \otimes U_0$.

---

1) Harish-Chandra, Some applications of the universal enveloping algebra of a semi-simple Lie algebra. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **70**(1951),28—99.

2）以 I_{ω_0} 記由 $\mathfrak{g}_+$ 和 $H-\omega_0(H)(H\in\mathfrak{h})$ 在 U 中所生成的左理想。我們証明 $I_{\omega_0}\neq U$，即 $U/I_{\omega_0}\neq(0)$。

实际上，以 I'_{ω_0} 記 $\mathfrak{g}_+$ 和 $H-\omega_0(H)(H\in\mathfrak{h})$ 在 U_0 中所生成的左理想。定义 $\mathfrak{g}_0$ 的一个一維表示 θ：

$$\theta(H)=\omega_0(H)\qquad H\in\mathfrak{h},$$
$$\theta(X)=0\qquad X\in\mathfrak{g}_+.$$

θ 可看作将 $\mathfrak{g}_0$ 映入复数域 C（作为 C 上一維結合代数）的一个表示。因 U_0 是 $\mathfrak{g}_0$ 的通用包絡代数（相对于嵌入映射 i），故有从 U_0 映入 C 的同态 $\tilde{\theta}$ 存在使

$$\tilde{\theta}\circ i=\theta,$$
$$\tilde{\theta}(1)=1.$$

我們可将 $\mathfrak{g}_0$ 看作 U_0 的一个子空間，这样 $i(X)=X$ 对 $X\in\mathfrak{g}$。于是

$$\tilde{\theta}(X)=\theta(X)\quad 对\quad X\in\mathfrak{g}.$$

因此，我們可以說 θ 扩充成了 U_0 映入 C 的一个表示 $\tilde{\theta}$，而为了符号簡单起見，仍将 $\tilde{\theta}$ 記作 θ。那么，θ 作为 U_0 的表示，它的核包有 I'_{ω_0}。因 θ 非零，故 $I'_{\omega_0}\neq U_0$。根据定理 2，作为向量空間，$U=U_-\otimes U_0$，故作为向量空間 $I_{\omega_0}=U_-\otimes I'_{\omega_0}$。因 $I'_{\omega_0}\neq U_0$，故 $I_{\omega_0}\neq U$。

3）我們証明，U 有唯一的一个包有 I_{ω_0} 的极大左理想。

实际上，将 U 看作一向量空間，而将它的左理想 I_{ω_0} 看作它的子空間，于是可造 U 对于 I_{ω_0} 的商空間 V，即 $V=U/I_{\omega_0}$。对 $\xi\in U$，$\eta+I_{\omega_0}\in V$，定义

$$\rho(\xi)(\eta+I_{\omega_0})=\xi\eta+I_{\omega_0},$$

因 I_{ω_0} 是 U 的左理想，易証

$$\xi\to\rho(\xi)$$

就是 U 的一个表示（可能是无限維的），而 ρ 在 $\mathfrak{g}$ 上的限制就是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示（仍記作 ρ）。

$v=1+I_{\omega_0}\in V$ 是 ρ 的一个权向量，权为 ω_0：

$$\rho(H)v = H + I_{\omega_0} = \omega_0(H) + I_{\omega_0} = \omega_0(H)v.$$

而V中向量

$$\rho(Y_{i_1})\rho(Y_{i_2})\cdots\rho(Y_{i_m})v$$

也是V中权向量,相应于权

$$\omega_0 - \alpha_{i_1} - \alpha_{i_2} - \cdots - \alpha_{i_m}.$$

自然,所有这些权向量綫性地生成V, 而$V = \sum_{\omega}^{\cdot} V_{\omega}$, V_{ω}是相应于权ω的权子空間. 显然V_{ω_0}是一維的.

設W是V的一个不变子空間. 我們先来証明$W = \sum_{\omega}^{\cdot}(W \cap V_{\omega})$. 显然有$\sum_{\omega}^{\cdot}(W \cap V_{\omega}) \subset W$. 設$u \in W$. 在直和分解$V = \sum^{\cdot} V_{\omega}$中,設$u = \sum_{\omega}^{\cdot} u_{\omega}$, $u_{\omega} \in V_{\omega}$. 在商空間$V/W$中,有

$$\sum_{\omega}^{\cdot} u_{\omega} \equiv 0 \pmod{W}.$$

商空間V/W自然可看成$\mathfrak{g}$的一个表示空間. 因V由权向量生成,所以V/W亦然, 即$V/W = \sum_{\omega}^{\cdot}(V/W)_{\omega}$,而$(V/W)_{\omega}$是相应于权$\omega$的权子空間. 因此,从$\sum_{\omega}^{\cdot} u_{\omega} \equiv 0 \pmod{W}$ 推出 $u_{\omega} \equiv 0 \pmod{W}$,即$u_{\omega} \in W$. 这証明了我們的断言.

因 V_{ω_0}是一維的, 故$W \cap V_{\omega_0} = 0$ 或 $W \cap V_{\omega_0} = V_{\omega_0}$. 如$W \cap V_{\omega_0} = V_{\omega_0}$, 則$v \in W$, 于是从$W$的不变性推出$W = V$. 如$W \cap V_{\omega_0} = (0)$,則从$W = \sum_{\omega}^{\cdot}(W \cap V_{\omega})$推出$W \subset V^{+} = \sum_{\omega < \omega_0} V_{\omega}$. 因此$V^{+}$所包含的$\rho$的不变子空間之併卽是$V$的唯一的一个极大不变子空間. 在同态

$$U \to U/I_{\omega_0} = V$$

之下,此极大不变子空間的完全反象卽是U中唯一的一个包有I_{ω_0}的极大左理想. 这样我們就証明U有唯一的一个包有I_{ω_0}的极大左理想.

4) 記I是U中包有I_{ω_0}的唯一的极大左理想. 于是向量空間

U 对于子空間 I 的商空間 U/I 同样看作 $\mathfrak{g}$（以及 U）的一个表示空間：对 $\xi \in U$，$\eta + I \in U/I$，令

$$\rho(\xi)(\eta + I) = \xi\eta + I.$$

由 I 的极大性推出，表示空間 U/I 是不可約的，因而給出 $\mathfrak{g}$ 的一个不可約表示 ρ. 象 3)中对于 U/I_{ω_0} 的討論一样，可証 ρ 的权皆形状

$$\omega_0 - \alpha_{i_1} - \alpha_{i_2} - \cdots - \alpha_{i_m},$$

U/I 由权向量生成，而 ω_0 是单权，$v = 1 + I$ 是相应于 ω_0 的权向量. 因此要証明定理 4，只須証 U/I 是有限維空間即可.

以下，記 $V = U/I$. 仍然有 $V = \sum^{\cdot} V_\omega$，$V_\omega$ 是相应于权 ω 的权子空間，$\dim V_{\omega_0} = 1$. 易見 V_ω 是有限維的. 問題是要証 ρ 只有有限个权.

5）以 $\mathfrak{g}_i$ 記由 X_i, Y_i, H_i 所生成的三維单代数，以 T_i 記由

$$v_k = \rho(Y_i)^k v \qquad k = 0, 1, 2, \cdots$$

所生成的 V 的子空間，則 T_i 在 $\rho(\mathfrak{g}_i)$ 之下不变. 更进一步，我們証明：T_i 在 $\rho(\mathfrak{g}_i)$ 的作用下，是有限維的不可約不变子空間.

实际上，注意，v_k 是 V 中权为 $\omega_0 - k\alpha_i$ 的权向量（$k = 0, 1, 2, \cdots$）而 $\alpha_i(H_i) = 2$，因此（相对于 $\mathfrak{g}_i$ 的表示 $\rho(\mathfrak{g}_i)$ 而言），v_k 是 T 中权为 $\omega_0(H_i) - 2k$ 的权向量. 記 $\omega_k = \omega_0(H_i) - 2k$，則 $T_i = \sum_k^{\cdot} V_{\omega_k}$，$V_{\omega_k}$ 是权 ω_k 的权子空間，而 $\dim V_{\omega_k} = 1$.

設 U_i 是 T_i 的一个相对于 $\rho(\mathfrak{g}_i)$ 不变的子空間. 重复 3)中对 W 所作的討論，可証 $U_i = \sum_k^{\cdot} U_i \cap V_{\omega_k}$. 再設 $U_i \neq T_i$，則 $U_i \subset T_i^+ = \sum_{k \geq 1} V_{\omega_k}$. 我們要証明 $U_i = 0$.

如 $j \neq i$，則 $[X_j, Y_i] = 0$. 于是

$$\rho(X_j)v_k = \rho(X_j)\rho(Y_i)^k v = \rho(Y_i)^k \rho(X_j) v = 0,$$

因此 $\rho(X_j)(j \neq i)$ 将 T_i 化为零，特别 $\rho(X_j)(j \neq i)$ 将 U_i 化为零. 又因 U_i 在 $\rho(\mathfrak{g}_i)$ 之下不变，故 U_i 在 $\rho(\mathfrak{g}_+)$ 之下不变. 另一方

面,从 $U_i=\sum_k{}^{'} U_i\cap V_{\omega_k}$ 推出 U_i 也在 $\rho(\mathfrak{h})$ 之下不变。因此,U_i 在 $\rho(\mathfrak{g}_0)$之下不变,那么也在 $\rho(U_0)$之下不变。于是

$$\rho(U)U_i=\rho(U_-)\rho(U_0)U_i\subset\rho(U_-)U_i$$
$$\subset\rho(U_-)T_i^+\subset\rho(U_-)V^+\subset V^+.$$

因 ρ 是 $\mathfrak{g}$ (以及 U)的不可約表示,而 $\rho(U)U_i$ 显然是 ρ 的不变子空間,故 $\rho(U)U_i=0$. 于是 $U_i=0$. 这証明了 T_i 的不可約性。

根据第九章定理 3 知道,$\mathfrak{g}_i$ 有一个有限維的不可約表示以 $\omega_0(H_i)$为首权. 根据第十章定理 2 卽可推出 T_i 是有限維的(那里是对两个有限維表示証明的,但不难看出証明中并沒有用到有限維这一点).

6) 以 $\mathfrak{F}_i$ 記在 $\rho(\mathfrak{g}_i)$作用下不变的 V 的有限維子空間的集合. 以 W_i 記 $\mathfrak{F}_i$ 中所有子空間的併. 我們証明: $W_i=V$.

实际上,只要証明 W_i 是 $\rho(\mathfrak{g})$的不变子空間卽可. 首先注意,如 $M,N\in\mathfrak{F}_i$, 則 $M+N\in\mathfrak{F}_i$. 其次,設 $M\in\mathfrak{F}_i$,則 $\rho(\mathfrak{g})M$ 是有限維的,而

$$\rho(\mathfrak{g}_i)\rho(\mathfrak{g})M\subset\rho([\mathfrak{g},\mathfrak{g}_i])M+\rho(\mathfrak{g})\rho(\mathfrak{g}_i)M\subset\rho(\mathfrak{g})M,$$

因此 $\rho(\mathfrak{g})M\in\mathfrak{F}_i$. 由此推出 W_i 在 $\rho(\mathfrak{g})$之下不变,因此 $W_i=V$.

7) 我們証明:如 ω 是 ρ 的一个权,則 $S\omega$ 亦然,而 S 是 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 羣 W 中任一元素.

設 x 是相对于权 ω 的一个非零权向量,根据 6),x 包在一个在 $\rho(\mathfrak{g}_i)$ 的作用下不变的 V 的有限維子空間 U 中. 因 V 由权向量张成,可设 U 也在 $\rho(\mathfrak{h})$ 的作用下不变. 根据第十章引理 2 的証明,

$\omega-\omega(H_i)\alpha_i=\omega-\dfrac{2(\omega,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\alpha_i$ 也是 ρ 的一个权. 記

$$S_i:\quad \omega\to\omega-\frac{2(\omega,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}\alpha_i,$$

于是我們証明了,如 ω 是 ρ 的权,$S_i\omega$ 也是权. 因 Weyl 羣 W 由 $S_i(i=1,2,\cdots,n)$生成,这就証明了对任一 $S\in W$, $S\omega$ 也是 ρ 的权.

8) 我們回忆 ρ 的一个权 ω 称为支配权，如 $\omega(H_i)$是 $\geqslant 0$ 的整数。ρ 的两个权 ω, ω' 称为等价，如有 $S \in W$ 使 $\omega = S\omega'$. 显然，这是个等价关系，在此等价关系之下，ρ 的权分为一些等价类。在 ρ 的权的任一等价类中，都有一个最高的权ω。因 $\omega \geqslant S_i\omega = \omega - \omega(H_i)\alpha_i$，故 $\omega(H_i) \geqslant 0$ 对 $i = 1, 2, \cdots, n$。这就是說 ω 是一个支配权。因为 ρ 的权的任一等价类只含有限个权（这是由于 Weyl 羣是有限羣），所以要証 ρ 只有有限个权，只需証 ρ 只有有限个支配权。

設 ω 是个支配权，ω 必为形状

$$\omega = \omega_0 - \beta = \omega_0 - \sum m_i\alpha_i, \quad m_i \geqslant 0.$$

那么

$$(\omega_0, \omega_0) = (\omega + \beta, \omega + \beta) = (\omega, \omega) + (\beta, \beta) + 2(\omega, \beta).$$

因 ω 是支配权，即 $\omega(H_i) \geqslant 0$ 对 $i = 1, 2, \cdots, n$，于是

$$(\omega, \beta) = \sum m_i(\omega, \alpha_i) = \frac{1}{2}\sum m_i\omega(H_i)(\alpha_i, \alpha_i) \geqslant 0,$$

所以

$$(\omega_0, \omega_0) \geqslant (\omega, \omega).$$

这証明 ω 落在球心在原点，半径为 $\sqrt{(\omega_0, \omega_0)}$ 的球內。又因 ρ 的权 ω 皆是 $\mathfrak{h}_0^*$ 中的格子点 $\omega_0 - \sum m_i\alpha_i$，这种格子点中只能有有限个落在上述球內。这証明了 ρ 只有有限个支配权。

这样定理 4 就完全証明了。

第十四章　半单李代数的不可約表示的特征标

§1. 不可約表示的权的重数的一个递推公式

設 $\mathfrak{g}$ 是个半单李代数，$\mathfrak{h}$ 是它的一个 Cartan 子代数，Σ 是 $\mathfrak{g}$ 的根系而 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一組基础根系. 对于每个根 α，选取根向量 $E_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ 使 $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = H_\alpha$.

設 ρ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个不可約表示，表示空間为 V，最高权为 Λ_V. 表示空間 V 有直和分解

$$V = \sum_\omega{}^{\cdot} V_\omega,$$

V_ω 为权 ω 的权子空間，由 V 中一切权为 ω 的权向量組成. 記 $\dim V_\omega = m_\omega$，則 m_ω 称为权 ω 的重数. 当 ω 是 $\mathfrak{h}$ 上的一个綫性函数而不是 ρ 的权时，令 $m_\omega = 0$.

对于一个固定的根 α，令

$$N(\alpha) = \{v \in V \text{使得 } \rho(E_\alpha)v = 0\},$$

則 $N(\alpha)$ 是 V 的一个子空間. 設 $v \in N(\alpha)$ 而 $H \in \mathfrak{h}$，則

$$\rho(E_\alpha)(\rho(H)v) = \rho(H)\rho(E_\alpha)v - \\ - [\rho(H), \rho(E_\alpha)]v = -\alpha(H)\rho(E_\alpha)v = 0.$$

这証明了 $N(\alpha)$ 在 $\rho(\mathfrak{h})$ 的作用下不变. 因此

$$N(\alpha) = \sum_\omega{}^{\cdot} N(\alpha)_\omega,$$

而 $N(\alpha)_\omega = N(\alpha) \cap V_\omega$.

引理 1.　設 $N(\alpha)_\omega \neq 0$，則

1°　$\dfrac{2(\omega, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ 是 $\geqslant 0$ 的整数，

2° $\dim\rho(E_{-\alpha})^k N(\alpha)_\omega =$

$$=\begin{cases}\dim N(\alpha)_\omega, & \text{若 } 0\leqslant k\leqslant \dfrac{2(\omega,\alpha)}{(\alpha,\alpha)},\\ 0, & \text{若 } k>\dfrac{2(\omega,\alpha)}{(\alpha,\alpha)},\end{cases}$$

3° 当 $0\leqslant k\leqslant \dfrac{2(\omega,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}-1$ 时，$\rho(E_\alpha)\rho(E_{-\alpha})$引起$\rho(E_{-\alpha})^k N(\alpha)_\omega$ 到它自身之上的一个一一綫性映射。

証．設 $u_0\in N(\alpha)_\omega$ 而 $u_0\neq 0$．令

$$u_{-k}=\rho(E_{-\alpha})^k u_0\quad (k=0,1,2,\cdots).$$

設 p 是最小非負整数使

$$u_{-p}\neq 0 \text{ 而 } u_{-p-1}=\rho(E_{-\alpha})u_{-p}=0,$$

那么根据第十章引理 2，有

$$p=\frac{2(\omega,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$$

以及

$$\rho(E_\alpha)u_{-k}=\rho(E_\alpha)\rho(E_{-\alpha})u_{-k+1}=$$

$$=k\left\{(\omega,\alpha)-\frac{k-1}{2}(\alpha,\alpha)\right\}u_{-k+1},\tag{1}$$

$$\rho(H)u_{-k}=(\omega-k\alpha,\alpha)u_{-k},\tag{2}$$

$$(k=0,1,2,\cdots,p),$$

其中置 $u_1=0$．因此 p 不依賴于 u_0 在 $N(\alpha)_\omega$ 中的选取，而$\dfrac{2(\omega,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$是 $\geqslant 0$ 的整数．这証明了 1°．

又当 $0\leqslant k\leqslant p$ 时，因 $u_{-k}=\rho(E_{-\alpha})^k u_0\neq 0$ 对任一 $u_0\in N(\alpha)_\omega$ 而 $u_0\neq 0$，所以

$$u_0\to u_{-k}=\rho(E_{-\alpha})^k u_0\quad (0\leqslant k\leqslant p)$$

是从 $N(\alpha)_\omega$ 到 $\rho(E_{-\alpha})^k N(\alpha)_\omega$ 之上的一一綫性映射．因此

$$\dim\rho(E_{-\alpha})^k N(\alpha)_\omega=\dim N(\alpha)_\omega,\quad (0\leqslant k\leqslant p).$$

显然也有

$$\dim\rho(E_{-\alpha})^k N(\alpha)_\omega=0,\quad (k>p).$$

因此 2° 也成立.

最后，由(1)式可知，当 $0 \leqslant k \leqslant p-1$ 时，$\rho(E_\alpha)\rho(E_{-\alpha})$ 引起 $\rho(E_{-\alpha})^k N(\alpha)_\omega$ 到自身之上的一个一一綫性映射．这就証明了 3°.

引理 2. 設 ω 是 ρ 的权而 $\omega+\alpha$ 不是 ρ 的权．再設 k 为适合条件 $0 \leqslant k \leqslant \dfrac{(\omega, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ 的整数，则

$$V_{\omega-k\alpha} = \sum_{j=0}^{k} \rho(E_{-\alpha})^{k-j} N(\alpha)_{\omega-j\alpha}. \tag{3}$$

証．对 k 施行归納法．当 $k=0$ 时，因 $\omega+\alpha$ 不是 ρ 的权，故 $V_\omega \subset N(\alpha)$．于是 $V_\omega = N(\alpha)_\omega$，因此这时引理 2 成立.

假設引理 2 对于 $k-1$ 成立，今証它对于 k 也成立．首先証明(3)式右方之和为直和．設 $y_j \in \rho(E_{-\alpha})^{k-j} N(\alpha)_{\omega-j\alpha}$ 而 $\sum_{j=0}^{k} y_j = 0$，那么 $\sum_{j=0}^{k} \rho(E_\alpha) y_j = 0$．当 $j<k$ 时，有 $j \leqslant k-1 < p/2$，于是 $0 \leqslant k-1-j \leqslant 2\left(\dfrac{p}{2}-j\right)-1 = \dfrac{2(\omega-j\alpha, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}-1$，因此根据引理 1 之 3° 有

$$\begin{aligned}\rho(E_\alpha) y_j \in \rho(E_\alpha)\rho(E_{-\alpha})^{k-j} N(\alpha)_{\omega-j\alpha} = \\ = \rho(E_{-\alpha})^{k-1-j} N(\alpha)_{\omega-j\alpha}.\end{aligned}$$

当 $j=k$ 时，由于 $y_k = N(\alpha)_{\omega-k\alpha} \subset N(\alpha)$，故 $\rho(E_\alpha) y_k = 0$．因此根据归納法假設也有 $\rho(E_\alpha) y_j = 0 \ (0 \leqslant j \leqslant k-1)$．另一方面，因为 $y_j \in \rho(E_{-\alpha})^{k-j} N(\alpha)_{\omega-j\alpha} = \rho(E_{-\alpha})\, \rho(E_{-\alpha})^{k-1-j} N(\alpha)_{\omega-j\alpha}$ $(0 \leqslant j \leqslant k-1)$，所以当 $0 \leqslant j \leqslant k-1$ 时，存在 $x_j \in \rho(E_{-\alpha})^{k-1-j} N(\alpha)_{\omega-j\alpha}$ 使 $y_j = \rho(E_{-\alpha}) x_j$．于是 $\rho(E_\alpha)\rho(E_{-\alpha}) x_j = \rho(E_\alpha) y_j = 0$．再利用引理 1 之 3° 就推出 $x_j = 0$．这样，如果 $0 \leqslant j \leqslant k-1$ 就有 $y_j = 0$，自然也有 $y_k = 0$，因此(3)式右方之和为直和.

再証明(3)式右方之和等于 $V_{\omega-k\alpha}$. 設 $x \in V_{\omega-k\alpha}$. 因为 $\rho(E_\alpha)x \in V_{\omega-(k-1)\alpha}$，根据归納法假設就有

$$\rho(E_\alpha)x \in \sum_{j=0}^{k-1} \rho(E_{-\alpha})^{k-1-j} N(\alpha)_{\omega-j\alpha}.$$

然而，因为 $j \leqslant k-1 < \frac{p}{2}$，仍根据引理 1 之3°知，$\rho(E_\alpha)\rho(E_{-\alpha})$ 引起 $\sum_{j=0}^{k-1} \rho(E_{-\alpha})^{k-1-j} N(\alpha)_{\omega-j\alpha}$ 之上的一个一一綫性映射，所以存在 $y \in \sum_{j=0}^{k-1} \rho(E_{-\alpha})^{k-1-j} N(\alpha)_{\omega-j\alpha}$ 使 $\rho(E_\alpha)x = \rho(E_\alpha)\rho(E_{-\alpha})y$. 于是 $\rho(E_\alpha)(x - \rho(E_{-\alpha})y) = 0$ 成立，故 $x - \rho(E_{-\alpha})y \in N(\alpha)$. 由于 $x - \rho(E_{-\alpha})y \in V_{\omega-k\alpha}$，如設 $z = x - \rho(E_{-\alpha})y$，則 $z \in N(\alpha)_{\omega-k\alpha}$. 另一方面，因 $\rho(E_{-\alpha})y \in \sum_{j=0}^{k-1} \rho(E_{-\alpha})^{k-j} N(\alpha)_{\omega-j\alpha}$，故 $x = z + \rho(E_{-\alpha})y \in \sum_{j=0}^{k} \rho(E_{-\alpha})^{k-j} N(\alpha)_{\omega-j\alpha}$. 这証明了引理 2.

推論.　如令 $n_\omega = \dim N(\alpha)_\omega$，則在引理 2 的假設下，当 $0 \leqslant k \leqslant \frac{(\omega, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ 时，有

$$m_{\omega-k\alpha} = \sum_{j=0}^{k} n_{\omega-j\alpha}. \tag{4}$$

因而

$$m_{\omega-k\alpha} - m_{\omega-(k-1)\alpha} = n_{\omega-j\alpha}. \tag{5}$$

証.　由引理 2 有

$$m_{\omega-k\alpha} = \sum_{j=0}^{k} \dim \rho(E_{-\alpha})^{k-j} N(\alpha)_{\omega-j\alpha}.$$

当 $0 \leqslant j \leqslant k \leqslant \frac{(\omega, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ 时，$0 \leqslant k - j \leqslant \frac{2(\omega, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$，所以根据引理 1 之 2° 有

$$\dim \rho(E_{-\alpha})^{k-j} N(\alpha)_{\omega-j\alpha} = \dim N(\alpha)_{\omega-j\alpha}.$$

因此(4)式成立. 又(5)式显然是(4)式的直接推論.

引理 3. 設 ω 是 ρ 的任意一权，而 α 是 $\mathfrak{g}$ 的任意一根，則

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} m_{\omega+j\alpha}(\omega + j\alpha, \alpha) = 0. \tag{6}$$

証. 首先注意当 $\omega+j\alpha$ 不是 ρ 的权时，$m_{\omega+j\alpha} = 0$. 因此(6)式中的和为有限和. 設 p 和 q 是非負整数使 $\omega + j\alpha\,(-p\leqslant j\leqslant q)$ 都是 ρ 的权而其余的 $\omega + j\alpha$ 都不是 ρ 的权，令

$$W = \sum_{j=-p}^{q} V_{\omega+j\alpha},$$

熟知 W 在 $\rho(E_\alpha)$, $\rho(E_{-\alpha})$ 以及 $\rho(H_\alpha)$ 之下都不变. 于是有

$$\mathrm{Tr}_W \rho(H_\alpha) = \mathrm{Tr}_W(\rho(E_\alpha)\rho(E_{-\alpha}) - \rho(E_{-\alpha})\rho(E_\alpha)) = 0$$

以及

$$\mathrm{Tr}_W \rho(H_\alpha) = \sum_{j=-p}^{q} m_{\omega+j\alpha}(\omega + j\alpha, \alpha).$$

又当 j 不在 $-p$ 与 q 之間时，$m_{\omega+j\alpha} = 0$，所以引理 3 成立.

引理 4. 設 ω 是 ρ 的一个权而 $\omega + \alpha$ 不是 ρ 的权，这里 α 是 $\mathfrak{g}$ 的一个根. 再設 $0 \leqslant k \leqslant \dfrac{2(\omega, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$，則

$$\mathrm{Tr}_{V_{\omega-k\alpha}} \rho(E_\alpha)\rho(E_{-\alpha}) = \sum_{j=0}^{k} (\omega - j\alpha, \alpha) m_{\omega-j\alpha}.$$

証. 先設 $0 \leqslant k \leqslant \dfrac{(\omega, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$，計算

$$\mathrm{Tr}_{V_{\omega-k\alpha}} \rho(E_\alpha)\rho(E_{-\alpha}).$$

根据引理 2,

$$V_{\omega-k\alpha} = \sum_{j=0}^{k} \rho(E_{-\alpha})^{k-j} N(\alpha)_{\omega-j\alpha}.$$

根据(1)，$\rho(E_\alpha)^{k-j} N(\alpha)_{\omega-j\alpha}$ 在 $\rho(E_\alpha)\rho(E_{-\alpha})$ 的作用下不变，因此

$$\mathrm{Tr}_{V_{\omega-k\alpha}}\rho(E_\alpha)\rho(E_{-\alpha})=$$
$$=\sum_{j=0}^{k}\mathrm{Tr}_{\rho(E_{-\alpha})^{k-j}N(\alpha)_{\omega-j\alpha}}\rho(E_\alpha)\rho(E_{-\alpha}).$$

再根据(5)式和(1)式就有

$$\mathrm{Tr}_{V_{\omega-k\alpha}}\rho(E_\alpha)\rho(E_{-\alpha})=$$
$$=\sum_{j=0}^{k}(m_{\omega-j\alpha}-m_{\omega-(j-1)\alpha})(k-j+1)\left(\omega-j\alpha-\frac{k-j}{2}\alpha,\alpha\right)$$
$$=\sum_{j=0}^{k}(\omega-j\alpha,\alpha)m_{\omega-j\alpha}.$$

再設 $\frac{(\omega,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}<k\leqslant\frac{2(\omega,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$. 在 $\mathfrak{h}_0^*$ 中作反射 S_α，令 $\omega'=S_\alpha(\omega)$, $\alpha'=S_\alpha(\alpha)$, 則

$$\alpha'=S_\alpha(\alpha)=-\alpha,$$
$$\omega'=S_\alpha(\omega)=\omega-\frac{2(\omega,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha=\omega-p\alpha,$$

而且

$$\frac{2(\omega',\alpha')}{(\alpha',\alpha')}=\frac{2(\omega,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=p.$$

設 $0\leqslant k'\leqslant\frac{(\omega',\alpha')}{(\alpha',\alpha')}$, 則根据上一段的結果有

$$\mathrm{Tr}_{V_{\omega'-k\alpha'}}\rho(E_{\alpha'})\rho(E_{-\alpha'})=\sum_{j=0}^{k'}(\omega'-j\alpha',\alpha')m_{\omega'-j\alpha'}.$$

注意

$$\omega'-k'\alpha'=\omega-p\alpha+k'\alpha=\omega-(p-k')\alpha,$$
$$\omega'-j\alpha'=\omega-p\alpha+j\alpha=\omega-(p-j)\alpha,$$

于是

$$\mathrm{Tr}_{V_{\omega-(p-k')\alpha}}\rho(E_{-\alpha})\rho(E_\alpha)=$$
$$=-\sum_{j=0}^{k'}(\omega-(p-j)\alpha,\alpha)m_{\omega-(p-j)\alpha}$$

$$= - \sum_{j=p-k'}^{p} (\omega - j\alpha, \alpha) m_{\omega - j\alpha}.$$

因 $0 \leqslant k' \leqslant \frac{(\omega', \alpha')}{(\alpha', \alpha')} = \frac{(\omega, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$，故 $\frac{(\omega, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \leqslant p - k' \leqslant \frac{2(\omega, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$.

将上式中 $p - k'$ 书作 k，有

$$\mathrm{Tr}_{V_{\omega-k\alpha}} \rho(E_{-\alpha})\rho(E_\alpha) = - \sum_{j=k}^{p} (\omega - j\alpha, \alpha) m_{\omega - j\alpha},$$

而 $\frac{(\omega, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \leqslant k \leqslant \frac{2(\omega, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$. 又因

$$\mathrm{Tr}_{V_{\omega-k\alpha}} \rho(E_\alpha)\rho(E_{-\alpha}) = $$
$$= \mathrm{Tr}_{V_{\omega-k\alpha}} \rho(E_{-\alpha})\rho(E_\alpha) + \mathrm{Tr}_{V_{\omega-k\alpha}} \rho(H_\alpha),$$

而

$$\mathrm{Tr}_{V_{\omega-k\alpha}} \rho(H_\alpha) = (\omega - k\alpha, \alpha) m_{\omega - k\alpha},$$

再利用引理3，注意这时因 $\omega + \alpha$ 不是权而有 $q = 0$，就有

$$\mathrm{Tr}_{V_{\omega-k\alpha}} \rho(E_\alpha)\rho(E_{-\alpha}) =$$
$$= - \sum_{j=k}^{p} (\omega - j\alpha, \alpha) m_{\omega - j\alpha} + (\omega - k\alpha, \alpha) m_{\omega - k\alpha}$$
$$+ \sum_{j=-p}^{0} (\omega + j\alpha, \alpha) m_{\omega + j\alpha}$$
$$= \sum_{j=0}^{k} (\omega - j\alpha, \alpha) m_{\omega - j\alpha}.$$

这就証明了引理 4.

引理 5. 設 ω 是 ρ 的任意一权，則

$$\mathrm{Tr}_{V_\omega} \rho(E_\alpha)\rho(E_{-\alpha}) = \sum_{j=0}^{\infty} (\omega + j\alpha, \alpha) m_{\omega + j\alpha}.$$

証. 首先注意右边之和为有限和. 設 p, q 是非負整数使 $\omega + j\alpha (-p \leqslant j \leqslant q)$ 都是 ρ 的权，而其余的 $\omega + j\alpha$ 都不是 ρ 的权. 令 $\omega' = \omega + q\alpha$，則 $\omega' + \alpha$ 不是 ρ 的权. 但 $\omega = \omega' - q\alpha$ 而

$0\leqslant q\leqslant\frac{2(\omega',\alpha)}{(\alpha,\alpha)}=p+q$，于是根据引理 4 有

$$\mathrm{Tr}_{V_\omega}\rho(E_\alpha)\rho(E_{-\alpha})=\sum_{j=0}^{q}(\omega'-j\alpha,\alpha)m_{\omega'-j\alpha}=$$
$$=\sum_{j=0}^{q}(\omega+j\alpha,\alpha)m_{\omega+j\alpha}.$$

然而若 $j>q$，$\omega+j\alpha$ 不是权，故 $m_{\omega+j\alpha}=0$. 因之最后之等式可写作

$$\mathrm{Tr}_{V_\omega}\rho(E_\alpha)\rho(E_{-\alpha})=\sum_{j=0}^{\infty}(\omega+j\alpha,\alpha)m_{\omega+j\alpha}.$$

定理 1 (H. Freudenthal[1]).　設 ρ 是半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个不可約表示，首权为 ω_0. 以 $\rho(G)$ 表示 ρ 的 Casimir 算子. 可以令

$$\rho(G)=rI,$$

于是对于 $\mathfrak{h}^*$ 中任一元 ω 都有

$$rm_\omega=m_\omega(\omega,\omega)+\sum_{\alpha\in\Sigma}\sum_{j=1}^{\infty}m_{\omega+j\alpha}(\omega+j\alpha,\alpha).\tag{7}$$

如令 $\delta=\frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha$（全体正根之和之半），則有

$$rm_\omega=m_\omega(\omega+2\delta,\omega)+2\sum_{\alpha>0}\sum_{j=1}^{\infty}m_{\omega+j\alpha}(\omega+j\alpha,\alpha).\tag{8}$$

特别，对于首权 ω_0 有

$$r=(\omega_0+2\delta,\ \omega_0)=(\omega_0+\delta,\omega_0+\delta)-(\delta,\delta).\tag{9}$$

因而也有

$$m_\omega\{(\omega_0+\delta,\omega_0+\delta)-(\omega+\delta,\omega+\delta)\}=$$
$$=2\sum_{\alpha>0}\sum_{j=1}^{\infty}m_{\omega+j\alpha}(\omega+j\alpha,\alpha).\tag{10}$$

---

1) H. Freudenthal, Zur Berechnung der Charaktere der halbeinfachen Lieschen Gruppen, I, *Indag. Math.*, **16** (1954), 369—376.

証. 設 $H_1, \cdots, H_n$ 是 $\mathfrak{h}$ 的一組基,令

$$((H_i, H_j))^{-1}_{1\leqslant i,j\leqslant n} = (q^{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n},$$

則

$$\rho(G) = \sum_{i,j=1}^{n} q^{ij}\rho(H_i)\rho(H_j) + \sum_{\alpha}\rho(E_\alpha)\rho(E_{-\alpha}).$$

設 ω 为 ρ 的一个权,則

$$\mathrm{Tr}_{V_\omega}\sum_{i,j=1}^{n} q^{ij}\rho(H_i)\rho(H_j) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} m_\omega q^{ij}\omega(H_i)\omega(H_j) = m_\omega(\omega, \omega).$$

又,根据引理 5

$$\mathrm{Tr}_{V_\omega}\rho(E_\alpha)\rho(E_{-\alpha}) = \sum_{j=0}^{\infty}(\omega + j\alpha, \alpha)m_{\omega+j\alpha}.$$

于是有

$$\mathrm{Tr}_{V_\omega}\rho(G) = m_\omega(\omega, \omega) + \sum_{\alpha\in\Sigma}\sum_{j=0}^{\infty}(\omega + j\alpha, \alpha)m_{\omega+j\alpha}.$$

然而 $\sum_{\alpha} m_\omega(\omega, \alpha) = 0$, 这是因为 α 与 $-\alpha$ 同时为根,所以

$$rm_\omega = m_\omega(\omega, \omega) + \sum_{\alpha\in\Sigma}\sum_{j=1}^{\infty} m_{\omega+j\alpha}(\omega + j\alpha, \alpha).$$

这証明了(7)式当 ω 是 ρ 的权时成立.

我們再証明(7)式当 ω 不是 ρ 的权时也成立. 这时 $m_\omega = 0$, 故只需証 $\sum_{\alpha\in\Sigma}\sum_{j=1}^{\infty} m_{\omega+j\alpha}(\omega + j\alpha, \alpha) = 0$ 即可. 如果全体 $\omega + j\alpha$ $(j = 1, 2, \cdots)$都不是 ρ 的权,这是显然的. 今設 $\omega' = \omega + k\alpha$ 是 ρ 的权,而 $\omega' + j\alpha$ $(-p \leqslant j \leqslant q)$ 也是 ρ 的权, 此外都不是 ρ 的权. 因 ω 不是 ρ 的权,故 $k > p$. 那么根据引理 3 就有

$$0 = \sum_{j=-p}^{q} m_{\omega'+j\alpha}(\omega' + j\alpha, \alpha) =$$

$$= \sum_{j=-p}^{q} m_{\omega+(j+k)\alpha}(\omega + (j + k)\alpha, \alpha) =$$

$$= \sum_{j=k-p}^{k+q} m_{\omega+j\alpha}(\omega + j\alpha, \alpha) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} m_{\omega+j\alpha}(\omega + j\alpha, \alpha).$$

这証明了(7)式对任意 $\omega \in \mathfrak{h}^*$ 都成立.

又,根据引理 3 有

$$\sum_{j=1}^{\infty} m_{\omega+j\alpha}(\omega + j\alpha, \alpha) = -\sum_{j=0}^{\infty} m_{\omega-j\alpha}(\omega - j\alpha, \alpha).$$

因此

$$\sum_{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} m_{\omega+j\alpha}(\omega + j\alpha, \alpha) =$$

$$= \sum_{\alpha>0} \sum_{j=1}^{\infty} m_{\omega+j\alpha}(\omega + j\alpha, \alpha) + \sum_{\alpha<0} \sum_{j=1}^{\infty} m_{\omega+j\alpha}(\omega + j\alpha, \alpha)$$

$$= 2 \sum_{\alpha>0} \sum_{j=1}^{\infty} m_{\omega+j\alpha}(\omega + j\alpha, \alpha) + \sum_{\alpha>0} m_{\omega}(\omega, \alpha).$$

由于 $\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha>0} \alpha$, 故 $\sum_{\alpha>0} (\omega, \alpha) = (\omega, 2\delta)$, 因此有

$$r m_{\omega} = m_{\omega}(\omega + 2\delta, \omega) + 2 \sum_{\alpha>0} \sum_{j=1}^{\infty} m_{\omega+j\alpha}(\omega + j\alpha, \alpha).$$

这就是(8)式. 特别, 当 ω_0 是 ρ 的首权时, $m_{\omega_0} = 1$, 而当 $\alpha > 0$ 时, $\omega_0 + j\alpha\,(j = 1, 2, \cdots)$ 都不是 ρ 的权,因此这时(8)式化为

$$r = (\omega_0 + 2\delta, \omega_0) = (\omega_0 + \delta, \omega_0 + \delta) - (\delta, \delta).$$

最后,由(8),(9)两式得

$$m_{\omega}\{(\omega_0 + \delta, \omega_0 + \delta) - (\omega + \delta, \omega + \delta)\} =$$

$$= 2 \sum_{\alpha>0} \sum_{j=1}^{\infty} m_{\omega+j\alpha}(\omega + j\alpha, \alpha).$$

定理 1 得証.

§ 2. 关于全体正根之和之半

在这一节里，我們准备举出半单李代数 g 的全体正根之和之半 $\delta=\frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha$ 的一些性质，这些性质在以后推导 g 的不可約表示的特征标公式时是需要的.

我們用 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 表 g 的一組基础根系.

引理 6. 設 $\delta=\frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha$，則

$$\frac{2(\delta, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}=1, \quad i=1, 2, \cdots, n.$$

因此 δ 为 $\mathfrak{h}$ 上的支配整綫性函数. 更进一步，对任一 $S\in W$（g 的 Weyl 羣），$\delta-S(\delta)$ 都是若干正根之和.

証. 記 $S_i=S_{\alpha_i}$. 我們研究 $\alpha\in\Sigma_+$ 在 S_i 作用下的結果. 如 $\alpha=\alpha_i$，則 $S_i(\alpha_i)=-\alpha_i$. 如 $\alpha\neq\alpha_i$，則根据第六章引理 6，

$$S_i(\alpha)=\alpha-\frac{2(\alpha, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}\alpha_i>0.$$

所以

$$S_i(\delta)=\frac{1}{2}\sum_{\substack{\alpha>0\\ \alpha\neq\alpha_i}}\alpha-\frac{1}{2}\alpha_i.$$

因此 $\delta-S_i(\delta)=\alpha_i$. 但

$$S_i(\delta)=\delta-\frac{2(\delta, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}\alpha_i,$$

所以

$$\frac{2(\delta, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}=1.$$

因此根据第十章引理 3，δ 为 $\mathfrak{h}$ 上的支配整綫性函数.

其次，設 $S\in W$ 而 $S\neq 1$. 这时 S 不能将全体正根都变为正根，所以存在某些 $\alpha\in\Sigma_+$ 使 $S(\alpha)<0$. 設 $-S(\alpha)=\beta\in\Sigma_+$，則

$\delta - S(\delta) = \Sigma\beta$, 而 β 皆为正根.

引理 7. 設 $\mu = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\varepsilon_\alpha\alpha$, 而 $\varepsilon_\alpha = \pm 1$. 如果对一切 $S \in W$ 而 $S \neq 1$ $\mu \succ S\mu$, 則 $\mu = \delta$.

証. 設 $\mu \neq \delta$. 将 $\mu = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\varepsilon_\alpha\alpha$ 內系数 $\varepsilon_\alpha = -1$ 的根 α 之和記作 ν, 則 $\mu = \delta - \nu$. 因 $\mu \neq \delta$, 故 $\nu \neq 0$. 写 $\nu = \sum_i m_i\alpha_i$, m_i 是 $\geqslant 0$ 的整数. 因 $\nu \neq 0$, 故

$$(\nu, \nu) = \sum_i m_i(\nu, \alpha_i) > 0,$$

因此至少有一足碼 i_0 使 $m_{i_0} > 0$ 而且 $(\nu, \alpha_{i_0}) > 0$. 这时 $\frac{2(\nu, \alpha_{i_0})}{(\alpha_{i_0}, \alpha_{i_0})}$ 是正整数. 根据假設

$$\mu \succ S_{i_0}\mu = \mu - \frac{2(\mu, \alpha_{i_0})}{(\alpha_{i_0}, \alpha_{i_0})}\alpha_{i_0},$$

故 $\frac{2(\mu, \alpha_{i_0})}{(\alpha_{i_0}, \alpha_{i_0})} > 0$. 可是又有

$$\frac{2(\mu, \alpha_{i_0})}{(\alpha_{i_0}, \alpha_{i_0})} = \frac{2(\delta, \alpha_{i_0})}{(\alpha_{i_0}, \alpha_{i_0})} - \frac{2(\nu, \alpha_{i_0})}{(\alpha_{i_0}, \alpha_{i_0})} = 1 - \frac{2(\nu, \alpha_{i_0})}{(\alpha_{i_0}, \alpha_{i_0})} \leqslant 0,$$

这是一个矛盾. 因此一定有 $\mu = \delta$.

引理 8. 設 ω_0 是半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个不可約表示 ρ 的首权, 而 ω 是 ρ 的一个权, 并假設 $\omega \neq \omega_0$, 那么

$$(\omega + \delta, \omega + \delta) < (\omega_0 + \delta, \omega_0 + \delta).$$

証. 因 $\omega \neq \omega_0$, 所以一定有正根 α 使 $\omega + \alpha$ 仍是 ρ 的权.

先考察 ω 是支配权的情形, 即設对任一 $S \in W$, $\omega \geqslant S\omega$. 設 α 是使 $\omega + \alpha$ 仍是 ρ 的权的諸正根中之最高者. 令 $\omega' = \omega + \alpha$, 我們先証明 $(\omega' + \delta, \omega' + \delta) > (\omega + \delta, \omega + \delta)$. 我們有

$$(\omega' + \delta, \omega' + \delta) - (\omega + \delta, \omega + \delta) = \\ = 2(\omega + \delta, \alpha) + (\alpha, \alpha). \qquad (1)$$

因 ω 为支配权，$\omega \geqslant S_\alpha\omega=\omega-\dfrac{2(\omega,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$，故 $\dfrac{2(\omega,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$ 是 $\geqslant 0$ 的整数，于是 $(\omega,\alpha)\geqslant 0$. 同样，因 δ 为支配整綫性函数，也有 $(\delta,\alpha)\geqslant 0$. 所以由(1)式导出

$$(\omega+\delta,\omega+\delta)<(\omega'+\delta,\omega'+\delta).$$

如 $\omega'=\omega_0$，則引理 8 得証. 今設 $\omega'\neq\omega_0$，我們来証明 ω' 也是支配权. 否則，有 α_j 存在使 $\dfrac{2(\omega',\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}<0$，亦即

$$\frac{2(\omega',\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}=\frac{2(\omega,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}+\frac{2(\alpha,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}<0.$$

因 ω 为支配权，$\dfrac{2(\omega,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}\geqslant 0$，所以

$$\frac{2(\alpha,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}<\frac{2(\omega',\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}<0.$$

这时 $\beta=\alpha-\dfrac{2(\omega',\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}\alpha_j$ 也是根，而 $\beta\succ\alpha$. 但是

$$S_j(\omega')=\omega'-\frac{2(\omega',\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}\alpha_j=\omega+\beta\ .$$

也是权，这与 α 的选取相抵触，故 ω' 必为支配权. 象上一段一样，取 α' 为最高的正根使 $\omega'+\alpha'$ 仍是 ρ 的权. 設 $\omega''=\omega'+\alpha'$，則

$$(\omega'+\delta,\omega'+\delta)<(\omega''+\delta,\omega''+\delta),$$

而 ω'' 也是支配权. 如 $\omega''=\omega_0$，則引理 8 得証. 否則，継續重复上面的方法得一系列支配权 $\omega\prec\omega'\prec\omega''\prec\cdots$，最后必达到 ω_0，而

$$(\omega+\delta,\omega+\delta)<(\omega'+\delta,\omega'+\delta)<$$
$$<(\omega''+\delta,\omega''+\delta)<\cdots<(\omega_0+\delta,\omega_0+\delta).$$

因此当 ω 是支配权时，引理 8 得証.

若 ω 不是支配权，則存在 S_i 使 $S_i(\omega)\succ\omega$. 設 $\omega'=S_i(\omega)$，$g=-\dfrac{2(\omega,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}$. 因 $S_i(\omega)\succ\omega$，故 $g>0$ 且 $\omega'=\omega+g\alpha_i$. 我們有

$$(\omega'+\delta,\omega'+\delta)=(\omega+\delta,\omega+\delta)+ \\ +2g(\omega+\delta,\alpha_i)+g^2(\alpha_i,\alpha_i).$$

由于 $2(\omega,\alpha_i)=-g(\alpha_i,\alpha_i)$，有 $2g(\omega,\alpha_i)=-g^2(\alpha_i,\alpha_i)$. 又由 $\frac{2(\delta,\alpha_i)}{(\alpha_i,\alpha_i)}=1$ 推出 $2g(\delta,\alpha_i)=\ g(\alpha_i,\alpha_i)$,故 $2g(\delta,\alpha_i)>0$. 所以

$$(\omega+\delta,\omega+\delta)<(\omega'+\delta,\omega'+\delta).$$

如 $\omega'=\omega_0$，則引理 8 得証. 故可設 $\omega'\neq\omega_0$. 如 ω' 是支配权,我們有$(\omega'+\delta,\omega'+\delta)<(\omega_0+\delta,\omega_0+\delta)$,因此这时引理 8 得証. 如 ω' 不是支配权，則重复上面的方法可得一系列的权 $\omega\prec\omega'\prec\omega''\prec\cdots$，最后必达到一个支配权 ω_1，而

$$(\omega+\delta,\omega+\delta)<(\omega'+\delta,\omega'+\delta)<\cdots \\ <(\omega_1+\delta,\omega_1+\delta).$$

如 $\omega_1=\omega_0$，引理 8 得証. 否則又有$(\omega_1+\delta,\omega_1+\delta)<(\omega_0+\delta,\omega_0+\delta)$，这时引理 8 也成立.

§ 3. 反对称函数

以 $\mathfrak{h}^*$ 表半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 的对偶空間. 設 F 是定义在 $\mathfrak{h}^*$ 上的复数值函数,对 Weyl 羣 W 中任一元素 S，定义一个新函数 SF

$$SF(\lambda)=F(S^{-1}\lambda),\quad \lambda\in\mathfrak{h}^*.$$

如对任一 $S\in W$，总有 $SF=F$，就称 F 为对称函数. 如对任一 $S\in W$，总有 $SF=\det S\cdot F$，就称 F 为反对称函数. 因 W 由 $S_1,S_2,\cdots,S_n$ 生成,故 F 对称当且仅当 $S_iF=F(i=1,2,\cdots,n)$ 而 F 反对称当且仅当 $S_iF=-F(i=1,2,\cdots,n)$.

以下我們将指数函数 e^t 記作 $\exp t$.

引理 9. 設 $\mu\in\mathfrak{h}_0^*$. 对任意 $\lambda\in\mathfrak{h}^*$，令

$$A_\mu(\lambda)=\sum_{S\in W}\det S\exp(S\mu,\lambda),\tag{1}$$

則 $A_\mu(\lambda)$ 是反对称函数而且 $A_{S\mu}(\lambda)=\det SA_\mu(\lambda)$. 更进一步，如

有 $S \neq 1$ 使 $S(\mu) = \mu$, 則 $A_\mu = 0$.

證. 显然有

$$SA_\mu(\lambda) = A_\mu(S^{-1}\lambda) = \sum_{S_1 \in W} \det S_1 \exp(S_1\mu, S^{-1}\lambda)$$

$$= \sum_{S_1 \in W} \det S_1 \exp(SS_1\mu, \lambda) = \det SA_\mu(\lambda),$$

卽 $A_\mu(\lambda)$ 是反对称的. 同样有

$$A_{S\mu}(\lambda) = \sum_{S_1 \in W} \det S_1 \exp(S_1 S\mu, \lambda) = \det SA_\mu(\lambda).$$

現在設有 $S \neq 1$ 而 $S(\mu)=\mu$. 我們先証明 μ 不屬于任一 Weyl 間. 否則, 設 $\mu \in C$, C 为一 Weyl 間, 則由于 $S(\mu) = \mu$, 就有 $S(C) \cap C \neq \phi$. 但 $S(C)$ 也是 Weyl 間, 故 $S(C) = C$, 由此推出 $S=1$. 矛盾. 因此有根 α 使 $(\alpha, \mu) = 0$, 于是 $S_\alpha(\mu) = \mu$. 然而 $\det S_\alpha = -1$, 故

$$A_{S_\alpha(\mu)}(\lambda) = \det S_\alpha A_\mu(\lambda) = -A_\mu(\lambda),$$

由此推出 $A_\mu(\lambda) = 0$.

引理 10. 設 $\mu_i(t_1, \cdots, t_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}t_j$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 是 n 个复变量 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 的綫性函数, 并設它們两两相异, 則函数 $\exp \mu_1(t_1, \cdots, t_n), \cdots, \exp \mu_m(t_1, \cdots, t_n)$ 在复数域上綫性无关.

證. 因 $\mu_1, \cdots, \mu_m$ 两两相异, 故有一組复数值 $a_1, \cdots, a_n$ 存在, 使得 $\mu_1(a_1, \cdots, a_n), \cdots, \mu_m(a_1, \cdots, a_n)$ 是 m 个两两相异的值. 設 $b_i = \mu_i(a_1, \cdots, a_n)$, 則 $b_1, \cdots, b_m$ 两两相异.

設有一綫性关系

$$c_1 \exp \mu_1(t_1, \cdots, t_n) + \cdots + c_m \exp \mu_m(t_1, \cdots, t_n) = 0, \quad (2)$$

其中 $c_1, \cdots, c_m$ 为复数. 設 t 为一新的复变数. 将 $t_1 = a_1 t, \cdots, t_n = a_n t$ 代入(2)式得

$$c_1 \exp b_1 t + \cdots + c_m \exp b_m t = 0,$$

将上式对 t 求 k 次导数得

$$c_1 b_1^k \exp b_1 t + \cdots + c_m b_m^k \exp b_m t = 0,$$
$$(k = 0, 1, 2, \cdots, m-1).$$

因 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 两两相异,故 Vandermonde 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1^{m-1} & b_2^{m-1} & \cdots & b_m^{m-1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

因此一定有 $c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$. 这証明了引理 10.

引理 11. 設有定义在 $\mathfrak{h}^*$ 上的复数值函数

$$F(\lambda) = \sum_\mu c_\mu \exp(\mu, \lambda),$$

其中 $\sum_\mu$ 系对有限个 $\mu \in \mathfrak{h}_0^*$ 求和, 而 c_μ 都是复数. 再設 $F(\lambda)$ 是反对称函数, 于是 F 必为有限个由(1)式所定义的函数 A_μ 的复系数綫性組合

$$F(\lambda) = \sum_\mu c_\mu A_\mu(\lambda), \tag{3}$$

其中 μ 还有性质 $\mu \succ S\mu$ 对一切 $S \in W$ 而 $S \neq 1$.

証. 对任意 $S \in W$, 我們有

$$(SF)(\lambda) = \sum_\mu c_\mu \exp(\mu, S^{-1}\lambda) = \sum_\mu c_\mu \exp(S\mu, \lambda).$$

因 F 为反对称函数,即 $SF(\lambda) = \det SF(\lambda)$, 故

$$F(\lambda) = \sum_\mu c_\mu \det S \exp(S\mu, \lambda).$$

由引理 10 知函数集 $\{\exp(\mu, \lambda)\}$ 綫性无关, 因此如果 $\exp(\mu, \lambda)$ 出現在 F 中,而 μ 与 ν 等价,則 $\exp(\nu, \lambda)$ 也出現在 F 中,而且如果 $\nu = S\mu$, 則它們分別以系数 c_μ 和 $\det S c_\mu$ 出現在 F 中. 于是, 在(3)式右方求和时,可先对与一支配綫性函数 μ 等价的一切綫性函数求和,然后再对所出現的一切支配綫性函数求和,就有

$$F(\lambda) = \sum_\mu c_\mu A_\mu(\lambda),$$

其中 μ 为支配綫性函数. 再根据引理 9, 可設 $\mu \succ S\mu$ 对一切 $S \in W$ 而 $S \neq 1$.

引理 12. 設 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_m$ 为 $\mathfrak{h}$ 上的 m 个两两相异的支配整綫性函数, 并設对 Weyl 羣 W 中任一元素 $S \neq 1$ 恒有 $\mu_i \succ S\mu_i$ $(i = 1, 2, \cdots, m)$, 那么 $A_{\mu_1}, A_{\mu_2}, \cdots, A_{\mu_m}$ 是复数域上綫性无关的函数.

證. 先指出, 当 $i \neq j$ 时,滿足 $S(\mu_i) = T(\mu_j)$ 的 $S, T \in W$ 不存在. 否則有 $\mu_i \succ T^{-1}S(\mu_i) = \mu_j$ 和 $\mu_j \succ S^{-1}T(\mu_j) = \mu_i$, 矛盾.

令 $\beta_i = \dfrac{2\alpha_i}{(\alpha_i, \alpha_i)}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 我們知道 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是 $\mathfrak{h}^*$ 的一組基, 而且 $\mu \in \mathfrak{h}^*$ 是整綫性函数当且仅当 (μ, β_i) 是整数 $(i = 1, 2, \cdots, n)$. 取

$$\xi = 2\pi\sqrt{-1} \sum_{i=1}^{n} x_i\beta_i \in \mathfrak{h}^*,$$

其中 $x_1, \cdots, x_n$ 为实变量. 置

$$A_{\mu_j}(\xi) = P_j(x_1, \cdots, x_n),$$

可証

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 P_j(x_1, \cdots, x_n) \overline{P_k(x_1, \cdots, x_n)} dx_1 \cdots dx_n =$$

$$= \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ W:1 & j = k, \end{cases} \tag{4}$$

其中 $W:1$ 表羣 W 的阶. 实际上,

$$P_j(x_1, \cdots, x_n)\overline{P_k(x_1, \cdots, x_n)} =$$

$$= \sum_{S, T \in W} \det ST \exp(S\mu_j, \xi) \overline{\exp(T\mu_k, \xi)},$$

$$\exp(S\mu_j, \xi) = \exp\{2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{n} (S\mu_j, \beta_i)x_i\},$$

$$\exp(T\mu_k, \xi) = \exp\{2\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{n} (T\mu_k, \beta_i)x_i\},$$

因为与一整綫性函数等价的綫性函数也是整的，所以 $(S\mu_j, \beta_i)$，$(T\mu_k, \beta_i)$ 都是整数 $(i=1, 2, \cdots, n)$. 又因当 $j \neq k$ 时，沒有 S, $T \in W$ 使 $S\mu_j = T\mu_k$，所以至少有一个 i 存在使 $(S\mu_j, \beta_i) \neq (T\mu_k, \beta_i)$. 因此

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 P_j \bar{P}_k dx_1 \cdots dx_n = 0.$$

当 $j = k$ 时，由于 $S \neq T$ 时，$S\mu_j \neq T\mu_j$，所以

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 P_j \bar{P}_j dx_1 \cdots dx_n =$$

$$\sum_{S \in W} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| \exp 2\pi\sqrt{-1} \sum_{i=1}^n (S\mu_j, \beta_i) x_i \right|^2 dx_1 \cdots dx_n =$$

$W:1$. 这就証明了(4)式成立.

現在設 $\sum_{j=1}^m c_j A_{\mu_j}(\lambda) = 0$，其中 c_i 为复数. 那么当然有 $\sum_{j=1}^m c_j P_i(x_1, \cdots, x_n) = 0$. 将此式双方乘以 $\overline{P_k(x_1, \cdots, x_n)}$ 再进行积分得 $c_k(W:1) = 0$，即 $c_k = 0$ $(k = 1, 2, \cdots, m)$. 这就証明了 $A_{\mu_1}, \cdots, A_{\mu_m}$ 綫性无关.

§4. 不可約表示的特征标公式

仍設 $\mathfrak{g}$ 是半单李代数，$\mathfrak{h}$ 是它的一个 Cartan 子代数，Σ 是它的根系，而 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是它的一組基础根系. 設 ρ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个不可約表示. 对于 $H \in \mathfrak{h}$，定义

$$\chi(H) = \mathrm{Tr} \exp \rho(H),$$

其中

$$\exp \rho(H) = I + \rho(H) + \frac{\rho(H)^2}{2!} + \frac{\rho(H)^3}{3!} + \cdots,$$

则 χ 是定义在 $\mathfrak{h}$ 上的一个函数，我們把 χ 称作表示 ρ 的特征标. 对于 ρ 的权 ω，以 m_ω 表 ω 的重数，即 $m_\omega = \dim V_\omega$，于是也有

$$\chi(H) = \sum_\omega m_\omega \exp \omega(H),$$

其中 $\exp\omega(H)$ 卽为通常的指数函数，而 $\sum_{\omega}$ 表示对 ρ 的所有的权 ω 求和. H. Weyl 証明了下面的定理.

定理 2(H. Weyl[1]). 設 ρ 是半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个不可約表示，首权为 ω_0. 令 $\delta=\frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\alpha$，卽 δ 是全体正根的半和，則对任意 $H\in\mathfrak{h}$，有

$$\chi(H)=\frac{\sum_{S\in W}\det S\exp[(S(\omega_0+\delta))(H)]}{\sum_{S\in W}\det S\exp[(S\delta)(H)]},\qquad(1)$$

其中 W 是 $\mathfrak{g}$ 的 Weyl 羣，而 $\det S$ 表 $S\in W$ 的行列式，而且有

$$\sum_{S\in W}\det S\exp[(S\delta)(H)]=$$
$$=\prod_{\alpha>0}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\alpha(H)\right)-\exp\left(-\frac{1}{2}\alpha(H)\right)\right],\qquad(2)$$

其中 $\prod_{\alpha>0}$ 表示对全体正根求积.

証. 对于 $H\in\mathfrak{h}$，存在 $\mathfrak{h}^*$ 中一个唯一确定的元素 λ，使得对任意 $\mu\in\mathfrak{h}^*$ 有 $\mu(H)=(\mu,\lambda)$. 对于定义在 $\mathfrak{h}$ 上的函数 $F(H)$，記 $F(\lambda)=F(H)$. 于是可以写

$$\chi(\lambda)=\sum_{\omega}m_{\omega}\exp(\omega,\lambda),$$

而(1),(2)两式可改写作

$$\chi(\lambda)=\frac{\sum_{S\in W}\det S\exp(S(\omega_0+\delta),\lambda)}{\sum_{S\in W}\det S\exp(S\delta,\lambda)}\qquad(1')$$

和

$$\sum_{S\in W}\det S\exp(S\delta,\lambda)=$$

1) 見 79 頁所引的文献.

$$= \prod_{\alpha>0}\left[\exp\left(\frac{1}{2}(\alpha,\lambda)\right)-\exp\left(-\frac{1}{2}(\alpha,\lambda)\right)\right]. \qquad (2')$$

先証明(2′)成立．令

$$Q(\lambda) = \prod_{\alpha>0}\left[\exp\left(\frac{1}{2}(\alpha,\lambda)\right)-\exp\left(-\frac{1}{2}(\alpha,\lambda)\right)\right]. \qquad (3)$$

考察 $S_i = S_{\alpha_i}$ 在正根上的作用．首先有 $S_i(\alpha_i) = -\alpha_i$．其次，如 $\alpha \succ 0$ 而 $\alpha \neq \alpha_i$，則根据第六章引理 6

$$S_i(\alpha) = \alpha - \frac{2(\alpha, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}\alpha_i \succ 0.$$

于是

$$\begin{aligned}(S_iQ)(\lambda) &= Q(S_i^{-1}\lambda) = Q(S_i\lambda)\\
&= \prod_{\alpha>0}\left[\exp\left(\frac{1}{2}(\alpha, S_i\lambda)\right)-\exp\left(-\frac{1}{2}(\alpha, S_i\lambda)\right)\right]\\
&= \prod_{\alpha>0}\left[\exp\left(\frac{1}{2}(S_i\alpha, \lambda)\right)-\exp\left(-\frac{1}{2}(S_i\alpha, \lambda)\right)\right]\\
&= \prod_{\substack{\alpha>0\\ \alpha\neq\alpha_i}}\left[\exp\left(\frac{1}{2}(\alpha, \lambda)\right)-\exp\left(-\frac{1}{2}(\alpha, \lambda)\right)\right]\cdot\\
&\quad\cdot\left[\exp\left(-\frac{1}{2}(\alpha_i, \lambda)\right)-\exp\left(\frac{1}{2}(\alpha_i, \lambda)\right)\right]\\
&= -Q(\lambda).\end{aligned}$$

这証明了 $Q(\lambda)$ 是反对称函数．

将(3)式右方乘开有

$$Q(\lambda) = \sum_{\mu} \pm \exp(\mu, \lambda),$$

其中 $\mu = \frac{1}{2}\sum_{\alpha>0}\varepsilon_\alpha\alpha$ 而 $\varepsilon_\alpha = \pm 1$．于是根据引理 11，有

$$Q(\lambda) = \sum_{\mu} \pm A_\mu(\lambda),$$

其中 μ 对一切 $S\in W$ 而 $S \neq 1$ 还适合条件 $\mu \succ S\mu$．再根据引理 7，在 $Q(\lambda)$ 中出現的 $A_\mu(\lambda)$ 只有 $A_\delta(\lambda)$ 这一項，即

$$Q(\lambda) = \pm A_\delta(\lambda).$$

比較 $\exp(\delta, \lambda)$ 在上式双方出現的系数得

$$Q(\lambda) = A_\delta(\lambda) = \sum_{S \in W} \det S \exp(S\delta, \lambda).$$

这証明了(2′)式成立.

以下我們証明 (1′) 式成立. 我們采用 H. Freudenthal[1)]的証明. 証明分以下几步进行:

1. 将 $\exp(\omega, \lambda)$ 乘 §1(8)式双方,再对 $\mathfrak{h}$ 上全体整綫性函数 ω 求和(注意,当 ω 不是 ρ 的权时, $m_\omega = 0$), 得

$$r\chi(\lambda) = \sum_{\omega} m_\omega(\omega + 2\delta, \omega)\exp(\omega, \lambda) +$$

$$+ 2\sum_{\omega}\sum_{\alpha > 0}\sum_{j=1}^{\infty} m_{\omega+j\alpha}(\omega + j\alpha, \alpha)\exp(\omega, \lambda)$$

$$= \sum_{\omega} m_\omega(\omega + 2\delta, \omega)\exp(\omega, \lambda) +$$

$$+ 2\sum_{\omega}\sum_{\alpha > 0}\sum_{j=1}^{\infty} m_\omega(\omega, \alpha)\exp(\omega - j\alpha, \lambda).$$

設 $\tau \in \mathfrak{h}^*$ 且滿足条件:对一切 $\alpha > 0$ 都有 $|\exp(\alpha, \tau)| > 1$, 于是

$$\sum_{\omega}\sum_{\alpha > 0}\sum_{j=1}^{\infty} m_\omega(\omega, \alpha)\exp(\omega - j\alpha, \tau) =$$

$$= \sum_{\omega}\sum_{\alpha > 0} m_\omega(\omega, \alpha)\exp(\omega, \tau)\sum_{j=1}^{\infty}[\exp(-\alpha, \tau)]^j$$

$$= \sum_{\omega}\sum_{\alpha > 0} m_\omega(\omega, \alpha)\exp(\omega, \tau)\frac{\exp(-\alpha, \tau)}{1 - \exp(-\alpha, \tau)}.$$

因此

$$r\chi(\tau) = \sum_{\omega} m_\omega(\omega, \omega)\exp(\omega, \lambda) + \sum_{\omega} m_\omega(2\delta, \omega)\exp(\omega, \lambda)$$

1) 見第 258 頁所引文献.

$$+ 2 \sum_{\omega} \sum_{\alpha>0} m_{\omega}(\omega, \alpha)\exp(\omega, \tau) \frac{\exp(-\alpha, \tau)}{1-\exp(-\alpha,\tau)}. \qquad (4)$$

2. 在 $\mathfrak{h}^*$ 中选一組基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 使 $(\varepsilon_i, \varepsilon_j)=\delta_{ij}$，其中 $\delta_{ii}=1$ 而当 $i \neq j$ 时 $\delta_{ij}=0$. 可設 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n \in \mathfrak{h}_0^*$. 若 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$，写 $\lambda = t_1\varepsilon_1 + t_2\varepsilon_2 + \cdots + t_n\varepsilon_n$，于是定义在 $\mathfrak{h}^*$ 上的复数值函数 $F(\lambda)$ 可以看作是 n 个复变数 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 的函数. 設 F 是可微的，如下地定义一个从 $\mathfrak{h}^*$ 到 $\mathfrak{h}^*$ 的映射 grad F：

$$(\operatorname{grad} F)(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial t_i}\right)(\lambda)\varepsilon_i.$$

再如下地定义一个作用在函数 F 上的 Laplace 算子 Δ，即定义函数

$$(\Delta F)(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 F(\lambda)}{\partial t_i^2}.$$

由簡单計算可以証明以下关系成立:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{grad} \exp(\omega, \lambda) = \exp(\omega, \lambda)\cdot\omega, \\ &\operatorname{grad}\operatorname{Log}(1-\exp(-\alpha, \tau)) = \frac{\exp(-\alpha, \tau)}{1-\exp(-\alpha, \tau)}\alpha, \\ &\Delta\exp(\omega, \lambda) = (\omega, \omega)\exp(\omega, \lambda) \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

3. 利用(5)式，从 $\chi(\lambda) = \sum_{\omega} m_{\omega}\exp(\omega, \lambda)$ 可得

$$\operatorname{grad} \chi(\lambda) = \sum_{\omega} m_{\omega}\exp(\omega, \lambda)\cdot\omega,$$

$$\Delta\chi(\lambda) = \sum_{\omega} m_{\omega}(\omega, \omega)\exp(\omega, \lambda).$$

于是(4)式可写作

$$\begin{aligned} r\chi(\tau) &= \Delta\chi(\tau) + (2\delta, \operatorname{grad}\chi(\tau)) \\ &\quad + 2\Big(\operatorname{grad}\operatorname{Log}\prod_{\alpha>0}(1-\exp(-\alpha, \tau)), \operatorname{grad}\chi(\tau)\Big) \\ &= \Delta\chi(\tau) + 2\Big(\delta + \operatorname{grad}\operatorname{Log}\prod_{\alpha>0}(1-\exp(-\alpha, \tau)), \\ &\qquad \operatorname{grad}\chi(\tau)\Big). \end{aligned} \qquad (6)$$

另一方面，由(3)式

$$Q(\tau) = \prod_{\alpha>0}\left[\exp\left(\frac{1}{2}(\alpha, \tau)\right) - \exp\left(-\frac{1}{2}(\alpha, \tau)\right)\right]$$

$$= \exp(\delta, \tau)\prod_{\alpha>0}(1 - \exp(-\alpha, \tau)),$$

我們有

$$\operatorname{grad} Q(\tau) = \operatorname{grad}\exp(\delta, \tau)\cdot\prod_{\alpha>0}(1 - \exp(-\alpha, \tau)) +$$

$$+ \exp(\delta, \tau)\operatorname{grad}\prod_{\alpha>0}(1 - \exp(-\alpha, \tau))$$

$$= \delta\exp(\delta, \tau)\prod_{\alpha>0}(1 - \exp(-\alpha, \tau)) +$$

$$+ \exp(\delta, \tau)\prod_{\alpha>0}(1 - \exp(-\alpha, \tau))$$

$$\operatorname{grad}\ \operatorname{Log}\prod_{\alpha>0}(1 - \exp(-\alpha, \tau))$$

$$= \delta Q(\tau) + Q(\tau)\operatorname{grad}\operatorname{Log}\prod_{\alpha>0}(1 - \exp(-\alpha, \tau)). \quad (7)$$

将(6)式双方乘以 $Q(\tau)$，再利用(7)式可得

$$r\chi(\tau)Q(\tau) = Q(\tau)\Delta\chi(\tau) + 2(\operatorname{grad} Q(\tau), \operatorname{grad}\chi(\tau)). \quad (8)$$

令

$$\varphi(\lambda) = Q(\lambda)\chi(\lambda),$$

由簡单計算証得

$$\Delta\varphi(\lambda) = \Delta Q(\lambda)\cdot\chi(\lambda) + Q(\lambda)\cdot\Delta\chi(\lambda) +$$
$$+ 2(\operatorname{grad} Q(\lambda), \operatorname{grad}\chi(\lambda)),$$

于是(8)式化为

$$r\varphi(\tau) = \Delta\varphi(\tau) - \Delta Q(\tau)\cdot\chi(\tau). \quad (9)$$

4. 我們先来証明 $\chi(\lambda)$ 是对称函数. 根据 $\chi(\lambda)$ 的定义

$$\chi(\lambda) = \sum_{\omega} m_{\omega}\exp(\omega, \lambda).$$

于是，对任意 $S\in W$，由于 $m_{S(\omega)}=m_\omega$ 我們有

$$(S\chi)(\lambda)=\sum_\omega m_\omega\exp(\omega,S^{-1}\lambda)=\sum_\omega m_\omega\exp(S\omega,\lambda)$$

$$=\sum_\omega m_{S(\omega)}\exp(S\omega,\lambda)=\chi(\lambda).$$

因此 $\chi(\lambda)$ 是对称函数．于是 $\varphi(\lambda)=Q(\lambda)\chi(\lambda)$ 是反对称函数．

利用(2′)式及 $\chi(\lambda)$ 的定义，有

$$\varphi(\lambda)=Q(\lambda)\chi(\lambda)=\sum_{S\in W}\det S\exp(S\delta,\lambda)\sum_\omega m_\omega\exp(\omega,\lambda)$$

$$=\sum_{\omega,S}\det Sm_\omega\exp(\omega+S\delta,\lambda).$$

根据引理 11，$\varphi(\lambda)$ 有形状

$$\varphi(\lambda)=\sum_\mu c_\mu A_\mu(\lambda),$$

其中 $\mu=\omega+S\delta$ 而且对任意 $T\in W$ 而 $T\neq 1$ 有性質 $\mu\succ T\mu$．然而

$$\Delta A_\mu(\lambda)=\sum_{S\in W}\det S\Delta\exp(S\mu,\lambda)$$

$$=\sum_{S\in W}\det S(S\mu,S\mu)\exp(S\mu,\lambda)$$

$$=(\mu,\mu)A_\mu(\lambda),$$

所以

$$\Delta\varphi(\lambda)=\Sigma c_\mu(\mu,\mu)A_\mu(\lambda).\tag{10}$$

可是由(9)式

$$\Delta\varphi(\tau)=r\varphi(\tau)-\Delta Q(\tau)\cdot\chi(\tau),\tag{11}$$

其中

$$r=(\omega_0+\delta,\omega_0+\delta)-(\delta,\delta).$$

又因 $Q(\lambda)=A_\delta(\lambda)$，所以

$$\Delta Q(\lambda)=(\delta,\delta)Q(\lambda).$$

于是

$$\Delta Q(\tau)\cdot\chi(\tau)=(\delta,\delta)Q(\tau)\chi(\tau)=(\delta,\delta)\varphi(\tau),\tag{12}$$

因此将(12)式代入(11)式，再比較(10)式与(11)式得

$$\sum_{\mu} c_{\mu}(\mu, \mu)A_{\mu}(\tau) = (\omega_0 + \delta, \omega_0 + \delta)\sum_{\mu} c_{\mu}A_{\mu}(\tau).$$

因而有

$$\sum_{\mu} c_{\mu}((\mu,\mu) - (\omega_0 + \delta, \omega_0 + \delta))A_{\mu}(\tau) = 0.$$

又因对一切 $\alpha \succ 0$ 满足条件 $|\exp(\alpha, \tau)| > 1$ 的 τ 組成 $\mathfrak{h}^*$ 中的一个开集，而 $A_{\mu}(\tau)$ 皆 $\mathfrak{h}^*$ 上的解析函数，故对一切 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ 都有

$$\sum_{\mu} c_{\mu}((\mu, \mu) - (\omega_0 + \delta, \omega_0 + \delta))A_{\mu}(\lambda) = 0.$$

注意其中 μ 形如 $\mu = \omega + S\delta$ 并且对一切 $T \in W$ 而 $T \neq 1$ 有性質 $\mu \succ T\mu$. 显然 $\mu = \omega + S\delta$ 皆支配整綫性函数，于是根据引理 12，$A_{\mu}(\lambda)$在复数域 C 上綫性无关，因而有

$$(\mu, \mu) = (\omega_0 + \delta, \omega_0 + \delta).$$

然而由 $\mu = \omega + S\delta$ 有

$$(\mu, \mu) = (S^{-1}\mu, S^{-1}\mu) = (S^{-1}\omega + \delta, S^{-1}\omega + \delta),$$

于是

$$(\omega_0 + \delta, \omega_0 + \delta) = (S^{-1}\omega + \delta, S^{-1}\omega + \delta).$$

因此根据引理 8，$\omega_0 = S^{-1}\omega$，即 $\omega = S\omega_0$，于是 $\mu = S(\omega_0 + \delta)$. 若 $S \neq 1$, $S^{-1}\mu = \omega_0 + \delta \prec \mu = \omega + S\delta$. 但 $\delta \succ S\delta$，故 $\omega_0 \prec \omega$. 矛盾. 因此一定有 $S = 1$，即 $\mu = \omega_0 + \delta$. 于是

$$\varphi(\lambda) = cA_{\omega_0+\delta}(\lambda).$$

比較上式双方 $\exp(\omega_0 + \delta, \lambda)$ 的系数知 $c = 1$. 因此

$$\varphi(\lambda) = A_{\omega_0+\delta}(\lambda) = \sum_{S\in W} \det S\exp(S(\omega_0 + \delta), \lambda).$$

所以

$$\chi(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{Q(\lambda)} = \frac{\sum_{S\in W} \det S\exp(S(\omega_0 + \delta),\lambda)}{\sum_{S\in W} \det S\exp(S\delta, \lambda)}.$$

这就証明了(2′)式成立.

这样定理2就完全証明了.

H. Weyl 利用他所获得的不可約表示的特征标公式还导出了不可約表示的級数公式.

定理 3. 設 ρ 是半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个不可約表示，首权为 ω_0，則它的級数

$$\dim \rho = \frac{\prod\limits_{\alpha>0}(\alpha,\ \omega_0+\delta)}{\prod\limits_{\alpha>0}(\alpha,\ \delta)}. \tag{13}$$

証. 我們有

$$\dim \rho = \chi(0).$$

設 t 为一实变数，則 $\chi(\sqrt{-1}t\delta)$ 作为 t 的函数是連續的，所以

$$\chi(0) = \lim_{t\to 0} \chi(\sqrt{-1}t\delta).$$

現在先証明可以选取充分小的 $\varepsilon>0$，使得当 $0<|t|<\varepsilon$ 时，$Q(\sqrt{-1}t\delta)\neq 0$. 我們有

$$Q(\sqrt{-1}\,t\delta) = \prod_{\alpha>0}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\sqrt{-1}t(\alpha,\delta)\right) - \right.$$

$$\left. - \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{-1}t(\alpha,\delta)\right)\right] = \prod_{\alpha>0} 2\sqrt{-1}\sin\frac{t}{2}(\alpha,\delta)$$

$$= (2\sqrt{-1})^m \prod_{\alpha>0} \sin\frac{t}{2}(\alpha,\delta),$$

其中 m 表正根的个数. 对任意 $S\in W$ 而 $S\neq 1$，有 $\delta \succ S\delta$，特别 $\delta \succ S_\alpha\delta = \delta - \frac{2(\delta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$. 因此若 α 是正根，一定有 $(\delta,\alpha)>0$，于是 $(\alpha,\delta)\neq 0$. 于是可以选取充分小的 $\varepsilon>0$，使得当 $0<|t|<\varepsilon$ 时，$\prod\limits_{\alpha>0}\sin\frac{t}{2}(\alpha,\delta)\neq 0$. 因之 $Q(\sqrt{-1}t\delta)\neq 0$.

設已选定充分小的 $\varepsilon>0$，使得当 $0<|t|<\varepsilon$ 时 $Q(\sqrt{-1}\,t\delta)\neq 0$，那么从 $\chi(\sqrt{-1}\,t\delta)\,Q(\sqrt{-1}t\delta) = \varphi(\sqrt{-1}t\delta)$ 推出

$$\dim \rho = \chi(0) = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(\sqrt{-1}t\delta)}{Q(\sqrt{-1}t\delta)}.$$

我們也有

$$\begin{aligned}
\varphi(\sqrt{-1}\,t\delta) &= \sum_{S\in W}\det S\exp(S(\omega_0+\delta),\sqrt{-1}\,t\delta)\\
&= \sum_{S\in W}\det S\exp(S^{-1}\delta,\sqrt{-1}t(\omega_0+\delta))\\
&= \sum_{S\in W}\det S\exp(S\delta,\ \sqrt{-1}t(\omega_0+\delta))\\
&= A_\delta(\sqrt{-1}t(\omega_0+\delta)) = Q(\sqrt{-1}t\,(\omega_0+\delta))\\
&= (2\sqrt{-1})^m\prod_{\alpha>0}\sin\frac{t}{2}(\alpha,\omega_0+\delta).
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
\dim\rho = \chi(0) &= \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(\sqrt{-1}\,t\delta)}{Q(\sqrt{-1}t\delta)} =\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{(2\sqrt{-1})^m\prod_{\alpha>0}\sin\frac{t}{2}(\alpha,\omega_0+\delta)}{(2\sqrt{-1})^m\prod_{\alpha>0}\sin\frac{t}{2}(\alpha,\delta)} =\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\prod_{\alpha>0}\frac{t}{2}(\alpha,\omega_0+\delta)}{\prod_{\alpha>0}\frac{t}{2}(\alpha,\delta)} = \frac{\prod_{\alpha>0}(\alpha,\omega_0+\delta)}{\prod_{\alpha>0}(\alpha,\delta)}.
\end{aligned}$$

这就証明了定理 3.

B. Kostant[1] 还利用 Weyl 的特征标公式导出了不可約表示的权的重数的一个公式.

定理 4. 設 ρ 是半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个不可約表示,首权为 ω_0. 对 $\mu\in\mathfrak{h}^*$, 令 $P(\mu)$ 表将 μ 分解成正根之和的方法数,則

1) B. Kostant, A formula for the multiplicity of a weight, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **93** (1959), 53—73.

$$m_\omega = \sum_{S \in W} \det S P(S(\omega_0 + \delta) - (\omega + \delta)). \tag{14}$$

証. 我們采用 P. Cartier[1] 的証明. 我們有

$$Q(\lambda) = \exp(\delta, \lambda) \prod_{\alpha > 0} (1 - \exp(-\alpha, \lambda)).$$

于是,对 $\tau \in \mathfrak{h}^*$ 适合 $|\exp(\alpha, \tau)| > 1$ (对一切正根 α),我們有

$$Q(\tau)^{-1} = \exp(-\delta, \tau) \sum_\mu P(\mu) \exp(-\mu, \tau).$$

那么从 Weyl 公式得

$$\begin{aligned}\chi(\tau) &= \sum_\omega m_\omega \exp(\omega, \tau) \\ &= \varphi(\tau) Q(\tau)^{-1} = \sum_\mu \sum_{S \in W} \det S \exp(S(\omega_0 + \delta) \\ &\quad - (\mu + \delta), \tau) P(\mu) \\ &= \sum_\omega \sum_{S \in W} \det S P(S(\omega_0 + \delta) - (\omega + \delta)) \exp(\omega, \tau).\end{aligned}$$

于是对任一 $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ 也有

$$\begin{aligned}&\sum_\omega m_\omega \exp(\omega, \lambda) = \\ &\quad = \sum_\omega \sum_{S \in W} \det S P(S(\omega_0 + \delta) - (\omega + \delta)) \exp(\omega, \lambda).\end{aligned}$$

根据引理10,比較上式双方系数即得(14)式.

1) P. Cartier, On H. Weyl's character formula, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **67** (1961), 228—230.

第十五章　复半单李代数的实形

§1. 实李代数的复扩充和复李代数的实形

設V是n維实綫性空間. 設 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 是V的一組基. 以 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 作为基可产生一n維复綫性空間$[V]$, 它由 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 的复系数綫性組合組成. $[V]$称为实綫性空間V的复扩充. 自然, V是$[V]$的子集而$[V]$的复維数等于V的实維数r.

設 $\mathfrak{g}$ 是一个r維实李代数. 仍設 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一組基. 令

$$[e_i, e_j] = \Sigma c_{ij}^k e_k, \tag{1}$$

則 $\mathfrak{g}$ 的結构由 r^3 个实常数 c_{ij}^k 所确定. 已知 $[\mathfrak{g}]$ 是个复綫性空間以 $e_1, e_2, \cdots, e_r$ 为基. 如果仍用(1)来引进$[\mathfrak{g}]$中換位运算, 則$[\mathfrak{g}]$成一复李代数, 称为实李代数的复扩充. 自然$[\mathfrak{g}]$的复維数等于 $\mathfrak{g}$ 的实維数 r.

設 $\mathfrak{g}_1$ 是个复李代数. 如果 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{g}_1$ 的一个子集, 而 $\mathfrak{g}$ 本身是个实李代数, 同时$[\mathfrak{g}] = \mathfrak{g}_1$, 則 $\mathfrak{g}$ 称为 $\mathfrak{g}_1$ 的一个实形. 并不一定每个复李代数都有实形. 但每个实李代数却都是它的复扩充的实形.

設 $\mathfrak{g}_0$ 是一个实李代数, $\mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}_0]$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的复扩充. $\mathfrak{g}_1$ 中元素可唯一地表成形状

$$X + iY, X, Y \in \mathfrak{g}_0.$$

在 $\mathfrak{g}_1$ 中引进一个映射 σ:

$$X + iY \xrightarrow{\sigma} X - iY.$$

σ 是将 $\mathfrak{g}_1$ 映到 $\mathfrak{g}_1$ 之上的一个一一映射, 对一切 $Z_1, Z_2, Z \in \mathfrak{g}_1$ 及 $\lambda \in C$, 有性质:

$$\sigma^2 = 1,$$

$$\sigma(Z_1 + Z_2) = \sigma(Z_1) + \sigma(Z_2),$$

$$\sigma(\lambda Z) = \bar{\lambda}\sigma(Z),$$

$$\sigma([Z_1, Z_2]) = [\sigma(Z_1), \sigma(Z_2)].$$

我們称 $\mathfrak{g}_1$ 的具有以上四性质的一一映射 σ 为 $\mathfrak{g}_1$ 的一个**半对合**. 易見, $\mathfrak{g}_0$ 是 σ 的不动点的全体,即

$$\mathfrak{g}_0 = \{Z \in \mathfrak{g}_1 \text{ 使得 } \sigma(Z) = Z\}.$$

反之, 設 $\mathfrak{g}_1$ 是个复代数, 而 σ 是 $\mathfrak{g}_1$ 的一个半对合. 令 $\mathfrak{g}_0 = \{Z \in \mathfrak{g}, \sigma(Z) = Z\}$. 易証 $\mathfrak{g}_0$ 是个实李代数. 实际上,如 $X, Y \in \mathfrak{g}_0$ 而 λ 为实数, 則 $\sigma(X+Y) = \sigma(X) + \sigma(Y) = X + Y$, $\sigma(\lambda X) = \lambda\sigma(X) = \lambda X$ 及 $\sigma([X, Y]) = [\sigma(X), \sigma(Y)] = [X, Y]$, 那么 $X+Y, \lambda X, [X+Y] \in \mathfrak{g}_0$. 更进一步,設 $Z \in \mathfrak{g}_1$, 則 Z 可表作

$$Z = \frac{1}{2}(Z + \sigma(Z)) + i\frac{1}{2i}(Z - \sigma(Z)),$$

而 $Z + \sigma(Z), \frac{1}{2i}(Z - \sigma(Z)) \in \mathfrak{g}_0$. 而且,如 $Z = X + iY, X, Y \in \mathfrak{g}_0$,則 $\sigma(Z) = X - iY$, 于是 $X = \frac{1}{2}(Z + \sigma(Z))$, $Y = \frac{1}{2i}(Z - \sigma(Z))$. 这說明 $\mathfrak{g}_1$ 中元素 Z 皆可唯一地表成形状 $Z = X + iY, X, Y \in \mathfrak{g}_0$. 因此 $\mathfrak{g}_0$ 是 $\mathfrak{g}_1$ 的一个实形.

定理 1. 設 $\mathfrak{g}_1$ 是个复李代数, 而 σ 是 $\mathfrak{g}_1$ 的一个半对合, 則 σ 的不动点的全体 $\mathfrak{g}_0$ 是 $\mathfrak{g}_1$ 的一个实形. 反之, $\mathfrak{g}_1$ 的任一实形皆可作为 $\mathfrak{g}_1$ 的某个半对合的不动点的全体而得到.

我們来研究实李代数 $\mathfrak{g}$ 和它的复扩充$[\mathfrak{g}]$的关系. 首先,如 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想,則$[\mathfrak{h}]$是$[\mathfrak{g}]$的理想,而且

$$[\mathfrak{g}/\mathfrak{h}] \approx [\mathfrak{g}]/[\mathfrak{h}].$$

由此推出, $\mathfrak{g}$ 可解,当且仅当$[\mathfrak{g}]$也可解. 更进一步,我們証明

定理 2. 如 $\mathfrak{r}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的根,則$[\mathfrak{r}]$是$[\mathfrak{g}]$的根.

証. 自然$[\mathfrak{r}]$可解. 現在設 $\mathfrak{n}$ 是$[\mathfrak{g}]$的根,令

$$\sigma(\mathfrak{n}) = \{\sigma(X), X \in \mathfrak{n}\},$$

則 $\sigma(\mathfrak{n})$也是$[\mathfrak{g}]$的可解理想. 因根是极大可解理想, $\sigma(\mathfrak{n}) \subset \mathfrak{n}$. 又因 $\mathfrak{n}$ 和 $\sigma(\mathfrak{n})$有相同的維数,故 $\sigma(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n}$; 这样 σ 就是 $\mathfrak{n}$ 的一个半对合. 根据定理 1, $\mathfrak{n}$ 是一个实代数 $\mathfrak{h}$ 的复扩充 $\mathfrak{n} = [\mathfrak{h}]$, 因此

$\mathfrak{h}$ 可解，$\mathfrak{h}\subset\mathfrak{r}$，于是 $\mathfrak{n}=[\mathfrak{h}]\subset[\mathfrak{r}]$. 这証明了$[\mathfrak{r}]$是$[\mathfrak{g}]$的根.

推論. $\mathfrak{g}$ 半单当且仅当$[\mathfrak{g}]$半单:

設 $\mathfrak{g}$ 为实李代数，而 $A\in\mathfrak{g}$. 定义

$$\mathrm{ad}AX=[A,X],\quad X\in\mathfrak{g}$$

則 $\mathrm{ad}A$ 为 $\mathfrak{g}$ 的导子，称为内导子. 令

$$(X,Y)=\mathrm{Tr}\,\mathrm{ad}X\mathrm{ad}Y,\quad X,Y\in\mathfrak{g},$$

称(X,Y)为 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型. 于是有

定理 3. 設 $\mathfrak{g}$ 为实李代数，于是 $\mathfrak{g}$ 可解当且仅当对一切 $X\in\mathfrak{g}'=[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$，$(X,X)=0$.

証. 設 $\mathfrak{g}$ 可解，則$[\mathfrak{g}]$也可解，于是对一切 $X\in[\mathfrak{g}]'$，$(X,X)=0$. 因此对一切 $X\in\mathfrak{g}'$，$(X,X)=0$.

反之，設对一切 $X\in\mathfrak{g}'$，$(X,X)=0$，則对一切 $X,Y\in\mathfrak{g}'$，$(X,Y)=0$. 因$[\mathfrak{g}']=[\mathfrak{g}]'$，故对一切 $X,Y\in[\mathfrak{g}]'$，$(X,Y)=0$. 特别对一切 $X\in[\mathfrak{g}]'$，$(X,X)=0$. 因之$[\mathfrak{g}]$可解.

定理 4. 設 $\mathfrak{g}$ 为实李代数，于是 $\mathfrak{g}$ 半单当且仅当 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型非退化.

定理 5. 設 $\mathfrak{g}$ 为实半单李代数，則 $\mathfrak{g}$ 可唯一地分解成它所有的(只有有限个)非交换单理想(亦即单代数)的直和. 反之，非交换单代数的直和一定半单. 如 $\mathfrak{g}$ 半单，則 $\mathfrak{g}'=\mathfrak{g}$.

定理 4 是定理 3 的推論，而定理 5 是定理 4 的推論. 均可仿复的情形証之.

§2. 紧致李代数

实李代数 $\mathfrak{g}$ 称为紧致的，如果在其中定义了一个在正則表示之下不变的定負对称双綫性型 $B(X,Y)$. 所謂不变是說

$$B(\mathrm{ad}AX,Y)+B(X,\mathrm{ad}AY)=0\ \text{对一切}\ A\in\mathfrak{g}.$$

定理 6. 紧致李代数 $\mathfrak{g}$ 可以分解成它的中心 $\mathfrak{c}$ 和它唯一的极大半单理想 $\mathfrak{g}_0$ 之直和. 因此中心 $\mathfrak{c}$ 还是 $\mathfrak{g}$ 的根.

証. 令

$$\mathfrak{g}_0 = \{X \in \mathfrak{g} \text{ 使得 } B(X, Z) = 0 \text{ 对一切 } Z \in \mathfrak{c}\}.$$

先証明 $\mathfrak{g}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想,而且 $\mathfrak{g}=\mathfrak{c}\dotplus\mathfrak{g}_0$. 实际上,設 $X \in \mathfrak{g}_0$ 而 $A \in \mathfrak{g}$, 则对一切 $Z \in \mathfrak{c}$ 有

$$B([A, X], Z) = -B(X, [A, Z]) = 0, \text{ 因}[A, Z] = 0.$$

这証明了 $\mathfrak{g}_0$ 是理想. 再設 $X \in \mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{c}$, 則 $B(X, X) = 0$; 因 B 定負,故 $X = 0$. 这証明了 $\mathfrak{g}_0 \cap \mathfrak{c} = (0)$. 因此 $\mathfrak{g} = \mathfrak{c}\dotplus\mathfrak{g}_0$.

再証 $\mathfrak{g}_0$ 半单. 如 $\mathfrak{g}_0$ 不半单, 則 $\mathfrak{g}_0$ 有非零交換理想 $\mathfrak{a}$. 由于 $B(X, Y)$对 $\mathfrak{g}_0$ 的限制是 $\mathfrak{g}_0$ 的不变定負对称双綫性型,令

$$\mathfrak{a}_1 = \{X \in \mathfrak{g}_0 \text{ 使得 } B(X, Y) = 0, \text{ 对一切 } Y \in \mathfrak{a}\},$$

于是可証 $\mathfrak{a}_1$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的理想而 $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{a}\dotplus\mathfrak{a}_1$. 于是

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{c} \dotplus \mathfrak{a} \dotplus \mathfrak{a}_1.$$

这样 $\mathfrak{c}\dotplus\mathfrak{a}$ 就属于 $\mathfrak{g}$ 的中心. 但 $\mathfrak{c}$ 为 $\mathfrak{g}$ 的中心,故 $\mathfrak{a} = (0)$, 与假設相违. 这証明了 $\mathfrak{g}_0$ 半单.

設 $\mathfrak{g}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个半单理想: 因 $\mathfrak{g}_1' = \mathfrak{g}_1$, 任一 $X \in \mathfrak{g}_1$ 皆可表作

$$X = \sum_i [Y_i, Z_i], \qquad Y_i, Z_i \in \mathfrak{g}_1$$

于是对任意 $Z \in \mathfrak{c}$,

$$B(X, Z) = B\left(\sum_i [Y_i, Z_i], Z\right) = \sum_i B([Y_i, Z_i], Z)$$

$$= -\sum_i B(Z_i, [Y_i, Z]) = 0, \text{因}[Y_i, Z] = 0.$$

这証明了 $\mathfrak{g}_1 \subseteq \mathfrak{g}_0$,因此 $\mathfrak{g}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 的唯一的极大半单理想.

系理. 設 $\mathfrak{c}$ 是紧致李代数 $\mathfrak{g}$ 的中心,則

$$\mathfrak{c} = \{X \in \mathfrak{g} \text{ 使得}(X, X) = 0\}$$

$$= \{X \in \mathfrak{g} \text{ 使得}(X, Y) = 0, \text{ 对一切 } Y \in \mathfrak{g}\}.$$

証. 先令

$$\mathfrak{c}_1 = \{X \in \mathfrak{g} \text{ 使得}(X, X) = 0\},$$

$$\mathfrak{c}_2 = \{X \in \mathfrak{g} \text{ 使得}(X, Y) = 0, \text{ 对一切 } Y \in \mathfrak{g}\}.$$

設 $A\in\mathfrak{c}_2$，卽对一切 $Y\in\mathfrak{g}$，$(A,Y)=0$．自然有$[A,Z]=0$对$Z\in\mathfrak{c}$．設 $X\in\mathfrak{g}_0$，則

$$([A,X],Y)=(A,[X,Y])=0 \quad 对一切\ Y\in\mathfrak{g}_0.$$

因 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型对 $\mathfrak{g}_0$ 的限制卽是 $\mathfrak{g}_0$ 的 Killing 型，又因 $\mathfrak{g}_0$ 半单，其 Killing 型非退化，故 $[A,X]=0$．因此 $A\in\mathfrak{c}$．这証明了 $\mathfrak{c}_2\subseteq\mathfrak{c}$．

再設 $A\in\mathfrak{c}$，那么对一切 $X,Y\in\mathfrak{g}$，

$$\mathrm{ad}A\mathrm{ad}XY=0.$$

故对一切 $X\in\mathfrak{g}$，$(A,X)=0$．这証明了 $\mathfrak{c}\subset\mathfrak{c}_2$．因此 $\mathfrak{c}=\mathfrak{c}_2$．

又自然有 $\mathfrak{c}_2\subset\mathfrak{c}_1$，因此 $\mathfrak{c}\subset\mathfrak{c}_1$．再設 $X\in\mathfrak{c}_1$，写 $X=Z+Y$，$Z\in\mathfrak{c}$，而 $Y\in\mathfrak{g}_0$，于是

$$0=(X,X)=(Z,Z)+2(Z,Y)+(Y,Y).$$

由 $\mathfrak{c}\subset\mathfrak{c}_1$ 知$(Z,Z)=0$；由 $\mathfrak{c}=\mathfrak{c}_2$ 知$(Z,Y)=0$．因此$(Y,Y)=0$，但 $\mathfrak{g}_0$ 半单，故 $Y=0$．由此$X=Z\subset\mathfrak{c}$．这又証明了 $\mathfrak{c}_1\subset\mathfrak{c}$．

因此 $\mathfrak{c}=\mathfrak{c}_1=\mathfrak{c}_2$．

定理 7． 李代数 $\mathfrak{g}$ 是紧致半单的，当且仅当它的 Killing 型是定負的．

証． 如 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型是定負的，則是非退化的，因此 $\mathfrak{g}$ 半单．又因 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型是不变的，故 $\mathfrak{g}$ 紧致．

反之，設 $\mathfrak{g}$ 紧致半单，因 $\mathfrak{g}$ 半单，$\mathfrak{g}$ 的 Killing 型非退化．因 $\mathfrak{g}$ 紧致，在 $\mathfrak{g}$ 上定义了定負的对称不变双綫性型 $B(X,Y)$．对于 $B(X,Y)$选取 $\mathfrak{g}$ 的一組标准正交基，則 $\mathrm{ad}\ X(X\in\mathfrak{g})$皆斜对称，故 $\mathrm{ad}\ X$ 的特征値是純虛数．因此$(X,X)=\mathrm{Tr}\ \mathrm{ad}X\ \mathrm{ad}X\leqslant 0$，故$(X,Y)$定負．

定理 7 証毕．

定理 8． 設 $\mathfrak{g}$ 是紧致半单代数．則 $\mathrm{Aut}\,\mathfrak{g}$ 是个紧致李羣，它的单位元的連通分支卽是 $\mathrm{Ad}\ \mathfrak{g}$，因此 $\mathrm{Ad}\ \mathfrak{g}$ 是連通紧致李羣．更进一步，$\mathrm{Aut}\ \mathfrak{g}$ 和 $\mathrm{Ad}\,\mathfrak{g}$ 都沒有中心．

証. 因为 $\mathfrak{g}$ 的自同构A使 Killing 型不变,即

$$(AX, AY)=(X, Y), \quad X, Y\in\mathfrak{g}$$

因此 Aut $\mathfrak{g}$ 是 r 維实正交羣的閉子羣, r 是 $\mathfrak{g}$ 的維数. 所以 Aut $\mathfrak{g}$ 是紧致李羣.

Aut $\mathfrak{g}$ 的李代数是 $\mathfrak{g}$ 的导子代数,因 $\mathfrak{g}$ 半单, $\mathfrak{g}$ 的导子皆內导子. 故 Aut $\mathfrak{g}$ 的李代数即是 ad $\mathfrak{g}$. 因此 Aut $\mathfrak{g}$ 的单位元的連通分支即是 Ad $\mathfrak{g}$.

Aut $\mathfrak{g}$ 和 Ad $\mathfrak{g}$ 无中心的証明同复半单李代数的情形一样.

系理. Ad $\mathfrak{g}$ 是以 $\mathfrak{g}$ 为李代数的連通紧致李羣.

証. 因 $\mathfrak{g}$ 半单, Ad$\mathfrak{g}$ 的李代数 ad$\mathfrak{g}$ 与 $\mathfrak{g}$ 同构.

定理 9. 实李代数 $\mathfrak{g}$ 是紧致的当且仅当它是一个紧致李羣的李代数.

証. 設 $\mathfrak{g}$ 是紧致李代数. 根据定理 5, $\mathfrak{g}=\mathfrak{c}+\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{c}$ 为 $\mathfrak{g}$ 之中心, $\mathfrak{g}_0$ 为 $\mathfrak{g}$ 之极大半单理想. 如 $\mathfrak{c}$ 是 m 維的, 則 T^m(m 維环羣)是以 $\mathfrak{c}$ 为李代数的連通紧致李羣. 根据定理 8 的系理, Ad $\mathfrak{g}_0$ 是以 $\mathfrak{g}_0$ 为李代数的連通紧致李羣. 因此 $T^m\times$ Ad $\mathfrak{g}_0$ (李羣的直积)是以 $\mathfrak{g}$ 为李代数的連通紧致李羣.

反之,設 $\mathfrak{g}$ 是紧致李羣 $\mathfrak{G}$ 的李代数. 設 $\varphi(X, X)$是給定在 $\mathfrak{g}$ 上的一个定負二次型. 对任一 $\sigma\in\mathfrak{G}$,

$$\alpha_\sigma: \qquad \tau\to\sigma\tau\sigma^{-1}$$

是 $\mathfrak{G}$ 的內自同构,它的微分 $d\alpha_\sigma$ 是 $\mathfrak{g}$ 的自同构. 令

$$\varphi_\sigma(X, X)=\varphi(d\alpha_\sigma(X), d\alpha_\sigma(X)),$$

則 φ_σ 是定义在 $\mathfrak{g}$ 上的定負二次型, 而当 X 固定时,是 σ 的連續函数. 置

$$\psi(X, X)=\int_{\sigma\in\mathfrak{G}}\varphi_\sigma(X, X)d\sigma,$$

則 $\psi(X, X)$是定义在 $\mathfrak{g}$ 上的定負二次型,而

$$\psi(d\alpha_\sigma(X), d\alpha_\sigma(X))=\psi(X, X)\ \text{对一切}\ \sigma\in\mathfrak{G}.$$

因此

$$\psi(\mathrm{ad}AX, Y)+\psi(X, \mathrm{ad}AY)=0\ \text{对一切}\ A\in\mathfrak{g},$$

这証明了 ψ 对 $\mathfrak{g}$ 的正则表示的不变性．因此 $\mathfrak{g}$ 是紧致的．

§3. 复半单李代数的紧致实形

定理 10. 設 $\mathfrak{g}$ 是个复半单代数，$\mathfrak{g}_0$ 是它的一个实形，而 σ 是相应的半对合，则 $(X, \sigma(Y))(X, Y \in \mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 上非退化厄米双綫性型．更进一步，$\mathfrak{g}_0$ 紧致当且仅当 $(X, \sigma(Y))$ 定負．

証． 因 σ 为半对合，故 $(X, \sigma(Y))$ 是 $\mathfrak{g}$ 上非退化厄米双綫性型．

如 $(X, \sigma(Y))$ 定負，则 $(Z, Z)(Z \in \mathfrak{g}_0)$ 定負．因此 $\mathfrak{g}_0$ 紧致．

反之，如 $\mathfrak{g}_0$ 紧致，则 (Z, Z) 定負 $(Z \in \mathfrak{g}_0)$．对 $X \in \mathfrak{g}$，写 $X = Y + iZ$，$Y, Z \in \mathfrak{g}_0$，于是，如 $X \neq 0$，

$$
\begin{aligned}
(X, \sigma(X)) &= (Y + iZ, Y - iZ) \\
&= (Y, Y) + (Z, Z) < 0.
\end{aligned}
$$

因而定負．

定理 11[1]**.** 設 $\mathfrak{g}$ 为复半单代数，$\mathfrak{g}_0$ 是个实形而 σ 是相应的半对合，于是

1) $\mathfrak{g}$ 有一 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 存在使 $\sigma(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$，$\sigma(\mathfrak{h}_0) = \mathfrak{h}_0$，而且 σ 引起 $\mathfrak{h}_0$ 的一个正交变换并引起根的一个置换．

2) 如 $\mathfrak{g}_0$ 紧致，则 $\sigma(H) = -H$ 对 $H \in \mathfrak{h}_0$ 而且 $\mathfrak{g}$ 有組 Weyl 基 $\{E_\alpha\}$ 使 $\sigma(E_\alpha) = -E_{-\alpha}$ 对一切 $\alpha \in \Sigma$．

3) 反之，給了 $\mathfrak{g}$ 的一組 Weyl 基 $\{E_\alpha\}$，可定义 $\mathfrak{g}$ 的一个半对合 σ 如下：

$$
\begin{aligned}
&\sigma(H) = -H &&\text{对 } H \in \mathfrak{h}_0, \\
&\sigma(E_\alpha) = -E_{-\alpha} &&\text{对 } \alpha \in \Sigma,
\end{aligned}
$$

则相应于 σ 的实形

$$
\mathfrak{g}_u = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i H_{\alpha_i} + \sum_{\alpha \in \Sigma} \sigma_\alpha E_\alpha \,\middle|\, a_i \text{ 純虚}, \bar{\sigma}_\alpha = -\sigma_{-\alpha} \right\}
$$

是紧致的．

1) 見 79 頁所引的文献．

証。 1）設 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 多項式为

$$|\lambda I - \mathrm{ad}X| = \lambda^r + \varphi_1(X)\lambda^{r-1} + \cdots + \varphi_n(X)\lambda^n,$$

而 $\varphi_n(X) \neq 0$。既然 $\varphi_n(X)$在 $\mathfrak{g}$ 上不恆为 0，故 $\varphi_n(X)$在 $\mathfrak{g}$ 的实型 $\mathfrak{g}_0$ 上也不恆为 0，这表明 $\mathfrak{g}_0$ 包有一个正则元 X_0。由于 $\mathfrak{g}$ 半单，

$$\mathfrak{h} = \{H \in \mathfrak{g} \text{ 使得} [H, X_0] = 0\}$$

就是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数。如 $H \in \mathfrak{h}$，则

$$[\sigma(H), X_0] = [\sigma(H), \sigma(X_0)] = \sigma([H, X_0]) = 0,$$

这証明了 $\sigma(H) \in \mathfrak{h}$，卽 $\sigma(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$。

令 α 是 $\mathfrak{h}$ 的一个根。令

$$\tilde{\alpha}(H) = \overline{\alpha(\sigma(H))} \qquad H \in \mathfrak{h}.$$

则 $\tilde{\alpha}$ 是定义在 $\mathfrak{h}$ 上的綫性函数。我們来証明 $\tilde{\alpha}$ 也是一个根，而$\sigma(\mathfrak{g}^\alpha) = \mathfrak{g}^{\tilde{\alpha}}$。实际上，設 $E_\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$，則

$$[H, E_\alpha] = \alpha(H)E_\alpha.$$

作用 σ 后，得

$$[\sigma(H), \sigma(E_\alpha)] = \overline{\alpha(H)}\sigma(E_\alpha) = \tilde{\alpha}(\sigma(H))\sigma(E_\alpha).$$

因 $\sigma(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$，故

$$[H, \sigma(E_\alpha)] = \tilde{\alpha}(H)\sigma(E_\alpha).$$

这証明了 $\tilde{\alpha}$ 也是一个根而 $\sigma(\mathfrak{g}^\alpha) = \mathfrak{g}^{\tilde{\alpha}}$。

最后，由

$$(\sigma(H_\alpha), H) = \overline{(H_\alpha, \sigma(H))} = \overline{\alpha(\sigma(H))}$$
$$= \tilde{\alpha}(H) = (H_{\tilde{\alpha}}, H)$$

对一切 $H \in \mathfrak{h}$ 推出 $\sigma(H_\alpha) = H_{\tilde{\alpha}}$，这証明了 σ 引起根的一个置換，因此 $\sigma(\mathfrak{h}_0) = \mathfrak{h}_0$，而且 σ 引出 $\mathfrak{h}_0$ 的一个正交变换。

在継續証明本定理之前，先給出以下的

引理 1. 設 $\mathfrak{g}$ 为复半单代数，$\mathfrak{h}$ 是它的一个 Cartan 子代数，而 φ 是 $\mathfrak{h}_0$ 的一个正交变换具性质：$\varphi^2 = 1$ 及 φ 引起根的一个置換 $\varphi(H_\alpha) = H_{\tilde{\alpha}}$。再假定对每个 $\alpha \in \Sigma$ 給了一个非零复数 ρ_α。如果$\{E_\alpha\}(\alpha \in \Sigma)$是 $\mathfrak{g}$ 的一組 Weyl 基，則 φ 可扩充成 $\mathfrak{g}$ 的一个半对

合 σ 使 $\sigma(E_\alpha)=\rho_\alpha E_{\tilde{\alpha}}$ 的充要条件是

$$\bar{\rho}_\alpha\rho_{\tilde{\alpha}}=1, \tag{1}$$

$$\rho_\alpha\rho_{-\alpha}=1, \tag{2}$$

$$\rho_{\alpha+\beta}N_{\alpha\beta}=\rho_\alpha\rho_\beta N_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}. \tag{3}$$

証． φ 自然可扩充成 $\mathfrak{g}$ 上的一个半綫性映射 σ 使

$$\sigma(H)=\varphi(H) \qquad \text{对 } H\in\mathfrak{h}_0,$$

$$\sigma(E_\alpha)=\rho_\alpha E_{\tilde{\alpha}} \qquad \text{对 } \alpha\in\Sigma.$$

这是因为 $\dim_R\mathfrak{h}_0=\dim_C\mathfrak{h}$，故 $\mathfrak{h}_0$ 和 $E_\alpha(\alpha\in\Sigma)$綫性地生成 $\mathfrak{g}$.

先来研究 $\sigma^2=1$ 的条件．因 $\varphi^2=1$,对 $H\in\mathfrak{h}$ 写$H=H_1+iH_2$, H_1, $H_2\in\mathfrak{h}_0$,則

$$\sigma^2(H)=\sigma(\sigma(H_1)-i\sigma(H_2))=\sigma(\varphi(H_1)-i\varphi(H_2))$$
$$=\varphi^2(H_1)+i\varphi^2(H_2)=H_1+iH_2=H,$$

即 $\sigma^2=1$ 在 $\mathfrak{h}$ 上永远成立．又

$$\sigma^2(E_\alpha)=\sigma(\rho_\alpha E_{\tilde{\alpha}})=\bar{\rho}_\alpha\rho_{\tilde{\alpha}}E_{\tilde{\tilde{\alpha}}},$$

因 $\varphi^2=1$ 在 $\mathfrak{h}_0$ 上，$\varphi^2(H_\alpha)=H_{\tilde{\tilde{\alpha}}}=H_\alpha$,即 $\tilde{\tilde{\alpha}}=\alpha$. 因此，$\sigma^2=1$ 当且仅当对一切 $\alpha\in\Sigma$,

$$\bar{\rho}_\alpha\rho_{\tilde{\alpha}}=1.$$

再看 σ 保持换位运算的条件．設 H, $H'\in\mathfrak{h}$,因 $\sigma(H)$, $\sigma(H')\in\mathfrak{h}$,故

$$[\sigma(H),\sigma(H')]=0=\sigma(0)=\sigma([H,H']).$$

其次

$$\sigma([E_\alpha,E_{-\alpha}])=\sigma(H_\alpha)=H_{\tilde{\alpha}},$$

$$[\sigma(E_\alpha),\sigma(E_{-\alpha})]=[\rho_\alpha E_{\tilde{\alpha}},\rho_{-\alpha}E_{-\tilde{\alpha}}]=\rho_\alpha\rho_{-\alpha}H_{\tilde{\alpha}},$$

因此 $\sigma([E_\alpha,E_{-\alpha}])=[\sigma(E_\alpha),\sigma(E_{-\alpha})]$ 当且仅当

$$\rho_\alpha\rho_{-\alpha}=1.$$

再次

$$\sigma([H,E_\alpha])=\sigma(\alpha(H)E_\alpha)=\overline{\alpha(H)}\sigma(E_\alpha)=\overline{\alpha(H)}\rho_\alpha E_{\tilde{\alpha}},$$

$$[\sigma(H),\sigma(E_\alpha)]=[\sigma(H),\rho_\alpha E_{\tilde{\alpha}}]=\rho_\alpha[\sigma(H),E_{\tilde{\alpha}}]$$
$$=\tilde{\alpha}(\sigma(H))\rho_\alpha E_{\tilde{\alpha}},$$

因此　$\sigma([H, E_\alpha]) = [\sigma(H), \sigma(E_\alpha)]$　当且仅当

$$\overline{\alpha(H)} = \tilde{\alpha}(\sigma(H)),$$

即

$$\tilde{\alpha}(H) = \overline{\alpha(\sigma(H))}.$$

因　$\sigma(H_\alpha) = H_{\tilde{\alpha}}$,故

$$\tilde{\alpha}(H) = (H, H_{\tilde{\alpha}}) = (H, \sigma(H_\alpha))$$
$$= \overline{(\sigma(H), H_\alpha)} = \overline{\alpha(\sigma(H))}$$

一定成立。最后,

$$\sigma([E_\alpha, E_\beta]) = \sigma(N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}) = N_{\alpha\beta}\rho_{\alpha+\beta}E_{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}},$$
$$[\sigma(E_\alpha), \sigma(E_\beta)] = [\rho_\alpha E_{\tilde{\alpha}}, \rho_\beta E_{\tilde{\beta}}] = \rho_\alpha\rho_\beta N_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} E_{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}},$$

因此　$\sigma([E_\alpha, E_\beta]) = [\sigma(E_\alpha), \sigma(E_\beta)]$

当且仅当

$$\rho_{\alpha+\beta}N_{\alpha\beta} = \rho_\alpha\rho_\beta N_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}.$$

这就証明了引理。

2) 現在設 $\mathfrak{g}_0$ 紧致,即 $(X, \sigma(X)) < 0$ 对 $X \neq 0$. σ 在 $\mathfrak{h}_0$ 上誘导一个正交变换而 $\sigma^2 = 1$,因此 $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_0^+ \dotplus \mathfrak{h}_0^-$,而

$$\mathfrak{h}_0^\pm = \{H_0 \in \mathfrak{h}_0 \text{ 使得 } \sigma(H_0) = \pm H_0\}.$$

如 $H_0 \in \mathfrak{h}_0^+$,則

$$(H_0, \sigma(H_0)) = (H_0, H_0) \geqslant 0,$$

由 $\mathfrak{g}$ 上厄米型 $(X, \sigma(X))$ 的定負性推出 $H_0 = 0$. 因此 $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h}_0^-$,即 $\sigma(H_0) = -H_0$ 对一切 $H_0 \in \mathfrak{h}_0$. 更由 $\sigma(H_\alpha) = -H_\alpha = H_{-\alpha}$ 推出 $\tilde{\alpha} = -\alpha$.

选一組 Weyl 基 $\{E_\alpha\}$. 置 $\sigma(E_\alpha) = \rho_\alpha E_{-\alpha}$. 因 $N_{\alpha,\beta} = -N_{-\alpha-\beta} = -N_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}$,所以根据引理 1 一定有

$$\bar{\rho}_\alpha\rho_{-\alpha} = \rho_\alpha\rho_{-\alpha} = 1,$$
$$\rho_{\alpha+\beta} = -\rho_\alpha\rho_\beta.$$

由第一式推出 ρ_α 为实. 其次

$$(E_\alpha, \sigma(E_\alpha)) = \rho_\alpha(E_\alpha, E_{-\alpha}) = \rho_\alpha < 0,$$

故 $\rho_\alpha < 0$. 令 $\rho'_\alpha = (-\rho_\alpha)^{-\frac{1}{2}}$(取正根),置 $E'_\alpha = \rho'_\alpha E_\alpha$,

則

$$(E'_\alpha, E'_{-\alpha}) = \rho'_\alpha \rho'_{-\alpha} = 1$$

而

$$[E'_\alpha, E'_\beta] = \rho'_\alpha \rho'_\beta N_{\alpha\beta} E_{\alpha+\beta} = N'_{\alpha\beta} E'_{\alpha+\beta}.$$

故

$$N'_{\alpha\beta} = \frac{\rho'_\alpha \rho'_\beta}{\rho'_{\alpha+\beta}} N_{\alpha\beta} = \frac{(-\rho_\alpha)^{-\frac{1}{2}}(-\rho_\beta)^{-\frac{1}{2}}}{(-\rho_{\alpha+\beta})^{-1/2}} N_{\alpha\beta}$$

$$= N_{\alpha\beta} = -N_{-\alpha-\beta} = -N'_{-\alpha-\beta},$$

这是說$\{E'_\alpha\}(\alpha \in \Sigma)$也是一組 Weyl 基．我們有

$$\sigma(E'_\alpha) = \rho'_\alpha \sigma(E_\alpha) = \rho'_\alpha \rho_\alpha E_{-\alpha} = \rho'_\alpha \rho_\alpha (\rho'_{-\alpha})^{-1} E'_{-\alpha}$$
$$= (-\rho_\alpha)^{-\frac{1}{2}} \rho_\alpha (-\rho_{-\alpha})^{\frac{1}{2}} E'_{-\alpha} = -E'_{-\alpha},$$

这証明了 2).

3) 首先，我們注意，根据引理 1，σ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个半对合．令

$$\mathfrak{g}_u = \{X \in \mathfrak{g} \text{ 使得 } \sigma(X) = X\},$$

則 $\mathfrak{g}_u$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个实形．易証 $\sqrt{-1}\,H_{\alpha_1}, \cdots, \sqrt{-1}\,H_{\alpha_n}$ 及 $E_\alpha - E_{-\alpha}$，$\sqrt{-1}(E_\alpha + E_{-\alpha})(\alpha \in \Sigma_+)$是 $\mathfrak{g}_u$ 的一組基(对实数域而言)．剩下的問題是要証 $\mathfrak{g}_u$ 是紧致李代数．我們来計算 $\mathfrak{g}_u$ 的 Killing 型．取

$$X = \sum_{i=1}^n x_i \sqrt{-1}\, H_{\alpha_i} + \sum_{\alpha \in \Sigma} \sigma_\alpha E_\alpha, \quad x_i \text{ 实}, \bar{\sigma}_\alpha = -\sigma_{-\alpha}$$

則

$$(X, X) = -\left(\sum_{i=1}^n x_i H_{\alpha_i}, \sum_{i=1}^n x_i H_{\alpha_i}\right) + \sum_{\alpha \in \Sigma} \sigma_\alpha \sigma_{-\alpha}$$
$$= -\left(\sum_{i=1}^n x_i H_{\alpha_i}, \sum_{i=1}^n x_i H_{\alpha_i}\right) - \sum_{\alpha \in \Sigma} \sigma_\alpha \bar{\sigma}_\alpha.$$

因此(X, X)是定負的．这証明了 $\mathfrak{g}_u$ 是紧致半单李代数．

这样定理 10 就完全証明了．

我們把 $\mathfrak{g}_u$ 称为 $\mathfrak{g}$ 的酉限制李代数．

我們知道，决定一切紧致半单代数只需决定一切复半单代数的紧致实形卽可．根据定理 10，复半单代数的紧致实形皆可通过定理中 3) 所指出的方法构造出来．

更进一步，我們有

定理 12. 复半单代数 $\mathfrak{g}$ 的任意两个紧致实形皆同构，实际上，皆可通过 $\mathfrak{g}$ 的一个內自同构使其中之一变到另一.

証. 根据 Cartan 子代数的共軛性，可假定 $\mathfrak{g}$ 的这两个紧致实形皆系由同一 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 所定. 但当 $\mathfrak{h}$ 給定后，$\mathfrak{g}$ 的 Weyl 基$\{E_\alpha\}(\alpha\in\Sigma)$ 可能不只一組. 設$\{E_\alpha\}$，$\{E'_\alpha\}(\alpha\in\Sigma)$是 $\mathfrak{g}$ 的两組 Weyl 基，命

$$[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta}E_{\alpha+\beta}, [E'_\alpha, E'_\beta] = N'_{\alpha\beta}E'_{\alpha+\beta}.$$

因 $N^2_{\alpha\beta} = N'^2_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} > 0$，故 $N_{\alpha\beta} = \pm N'_{\alpha\beta}$. 于是根据第五章定理 6 的証明，有 $\mathfrak{g}$ 的自同构 σ 存在，使

$$\sigma(H) = H, \quad H\in\mathfrak{h}$$
$$\sigma(E_\alpha) = \pm E'_\alpha, \quad \alpha\in\Sigma.$$

再根据第八章引理 2，σ 一定是形为 $\exp \operatorname{ad} H(H\in\mathfrak{h})$的內自同构.

由此即可推出定理 12.

另外，显然由定理 11 亦可推出：紧致代数 $\mathfrak{g}_u$ 单，当且仅当$[\mathfrak{g}_u]$亦单. 因此根据定理 11 和 12，要決定一切单紧致代数，只須定出每一复单代数的一个紧致实形，而这只要在复单代数中固定一个 Cartan 子代数，然后按定理 11 中 3)的方法作出它的紧致实形.

我們来确定典型代数的紧致实形.

首先研究 A_n. A_n 由所有跡为 0 的 $(n+1)\times(n+1)$ 矩陣构成，而

$$\mathfrak{h}_0 = H(\lambda_1\cdots\lambda_{n+1}) = \left\{\left.\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{n+1}\end{pmatrix}\right| \Sigma\lambda_i = 0\right\}$$

是 A_n 的一个 Cartan 子代数. A_n 的根系是

$$\lambda_i - \lambda_k, \qquad 1\leqslant i, k\leqslant n+1, i\neq k.$$

将 A_n 的根嵌入 $\mathfrak{h}$ 有

$$H_{\lambda_i-\lambda_k} = \frac{1}{2(n+1)}(E_{ii} - E_{kk}).$$

注意 E_{ik} 是相应于 $\lambda_i - \lambda_k$ 的根向量，而

$$[E_{ik}, E_{ki}] = E_{ii} - E_{kk} = 2(n+1)H_{\lambda_i - \lambda_k}.$$

如令

$$E_{\lambda_i-\lambda_k} = \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}} E_{ik},$$

則

$$[E_{\lambda_i-\lambda_k}, E_{-(\lambda_i-\lambda_k)}] = H_{\lambda_i-\lambda_k}.$$

容易驗証 $\{E_{\lambda_i-\lambda_k}\}$ 是一組 Weyl 基. 由此而得的 A_n 的紧致实形 $(A_n)_u$ 由

$$\sqrt{-1}\, H_{\lambda_i-\lambda_k}, E_{ik} - E_{ki}, \sqrt{-1}\,(E_{ik} + E_{ki})$$

的实綫性組合构成. 因此$(A_n)_u$ 由一切$(n+1)\times(n+1)$的跡为 0 的斜厄米矩陣組成.

B_n 中取

$$\mathfrak{h} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & \lambda_1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda_n & & & \\ & & & & -\lambda_1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & -\lambda_n \end{pmatrix}\right\}.$$

B_n 的根系是

$$\pm\lambda_i \pm \lambda_k (i < k) \quad 和 \quad \pm\lambda_i.$$

将 B_n 的根嵌入 $\mathfrak{h}$,

$$H_{\pm\lambda_i\pm\lambda_k} = \frac{1}{4n-2}(\pm H_i \pm H_k), \quad H_{\pm\lambda_i} = \frac{1}{4n-2}(\pm H_i).$$

我們有根向量

$$E_{\lambda_i-\lambda_k} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & E_{ik} & \\ & & -E_{ki} \end{pmatrix}, \quad E_{-\lambda_i+\lambda_k} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & E_{ki} & \\ & & -E_{ik} \end{pmatrix}, i < k,$$

$$E_{\lambda_i+\lambda_k} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & E_{ik} - E_{ki} \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{-\lambda_i-\lambda_k} = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & -E_{ik} + E_{ki} & 0 \end{pmatrix}, i<k$$

$$E_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_i \\ -e_i' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{-\lambda_i} = \begin{pmatrix} 0 & -e_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ e_i' & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

注意

$$[E_{\lambda_i-\lambda_k}, E_{-(\lambda_i-\lambda_k)}] = H_i - H_k,$$
$$[E_{\lambda_i+\lambda_k}, E_{-(\lambda_i+\lambda_k)}] = H_i + H_k,$$
$$[E_{\lambda_i}, E_{-\lambda_i}] = H_i.$$

如令

$$\widetilde{E}_{\lambda_i-\lambda_k} = \frac{1}{\sqrt{4n-2}} E_{\lambda_i-\lambda_k}, \quad \widetilde{E}_{-(\lambda_i-\lambda_k)} = \frac{1}{\sqrt{4n-2}} E_{-(\lambda_i-\lambda_k)},$$
$$\widetilde{E}_{\lambda_i+\lambda_k} = \frac{1}{\sqrt{4n-2}} E_{\lambda_i+\lambda_k}, \quad \widetilde{E}_{-(\lambda_i+\lambda_k)} = \frac{1}{\sqrt{4n-2}} E_{-(\lambda_i-\lambda_k)},$$
$$\widetilde{E}_{\lambda_i} = \frac{1}{\sqrt{4n-2}} E_{\lambda_i}, \quad \widetilde{E}_{-\lambda_i} = \frac{1}{\sqrt{4n-2}} E_{-\lambda_i},$$

容易驗証 $\{\widetilde{E}_{\pm\lambda_i\pm\lambda_k}, \widetilde{E}_{\pm\lambda_i}\}$ 是一組 Weyl 基. 这組 Weyl 基所定之紧致实形由 B_n 中一切斜厄米陣組成.

同样方法可得, C_n 的一个紧致实形由 C_n 中一切斜厄米陣組成; D_n 的一个紧致实形由 D_n 中一切斜厄米陣組成.

§4. 半单紧致李代数的根和权

由于任一半单紧致代数皆是它的复扩充的酉限制代数, 因此只需考察复半单代数 $\mathfrak{g}$ 的酉限制代数 $\mathfrak{g}_u$.

設 ρ 是 $\mathfrak{g}_u$ 的一个表示, $X_1, \cdots, X_r$ 是 $\mathfrak{g}_u$ 的一組基, 則

$$\sum_{i=1}^{r} c_i X_i \to \sum_{i=1}^{r} c_i \rho(X_i) \quad (c_i \text{ 为复数})$$

就是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示, 仍記之为 ρ. 反之, $\mathfrak{g}$ 的任一表示 ρ 对 $\mathfrak{g}_u$ 的限制是 $\mathfrak{g}_u$ 的一个表示. 因 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}_u$ 有同一組基, 故 ρ 作为 $\mathfrak{g}_u$ 的表示不可約当且仅当 ρ 作为 $\mathfrak{g}$ 的表示不可約, 而且 ρ 作为 $\mathfrak{g}_u$ 的表示完全可約当且仅当 ρ 作为 $\mathfrak{g}$ 的表示完全可約. 因此我們有

定理 13. 半单紧致代数的任一表示皆完全可約.

我們再給出另一証明(积分方法). 設 $\mathfrak{g}_u$ 是半单紧致代数, 于是以 $\mathfrak{g}_u$ 为李代数的单連通李羣 $\mathfrak{G}_u$ 是紧致的. $\mathfrak{g}_u$ 的任一表示 ρ 皆是 $\mathfrak{G}_u$ 的某一表示 Φ 的微分 $\rho = d\Phi$. 反之, $\mathfrak{G}_u$ 的任一表示 Φ

的微分 $d\Phi$ 是 $\mathfrak{g}_u$ 的一个表示. 显然, ρ 不可約当且仅当 Φ 不可約, 而 ρ 完全可約当且仅当 Φ 完全可約. 因紧致羣的任一表示皆完全可約, 故 $\mathfrak{g}_u$ 的任一表示皆完全可約.

注. 从这个証明亦可推出复半单代数的任一表示皆完全可約. 这是 H. Weyl 原来的証明.

設 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个 Cartan 子代数, $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是 $\mathfrak{g}$ 对于 $\mathfrak{h}$ 的一組素根系, 則 $\sqrt{-1}\,H_{\alpha_1}, \cdots, \sqrt{-1}\,H_{\alpha_n}$ 是 $\mathfrak{h}_u = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_u$ 的一組基. 自然 $\mathfrak{h}_u$ 是 $\mathfrak{g}_u$ 的一个极大交換子代数, 称为 $\mathfrak{g}_u$ 的 Cartan 子代数.

設 ω 是 $\mathfrak{g}$ 的表示 ρ 的一个权, 表示空間为 V, 相应的权向量为 $x \neq 0$, 即

$$\rho(H)x = \omega(H)x, \quad H \in \mathfrak{h}$$

于是

$$\rho(H')x = \omega(H')x, \quad H' \in \mathfrak{h}_u.$$

因此 ω (看作 $\mathfrak{h}_u$ 上的一个綫性函数) 就是 $\mathfrak{g}_u$ 的表示 ρ 的权. 我們証明

引理 2. $\mathfrak{g}_u$ 的权皆是 $\mathfrak{h}_u$ 上純虛的綫性函数.

証. 因权可表成根的有理系数綫性組合, 故只需对根来証明本引理即可. 我們知道, $\mathfrak{g}_u$ 的 Killing 型是定負的, 而 $\mathrm{ad}A (A \in \mathfrak{g}_u)$ 是 $\mathfrak{g}_u$ 上的斜厄米变换, 因而它的特征值是純虛数. 特别 $\mathrm{ad}H'$ $(H' \in \mathfrak{h}_u)$ 的特征值是純虛数, 于是根皆是純虛的. 証毕.

設 ω 是一个权, 有 $H_\omega \in \mathfrak{h}$ 使

$$(H, H_\omega) = \omega(H), \ H \in \mathfrak{h}.$$

特别

$$\omega(H') = (H', H_\omega), \ H' \in \mathfrak{h}_u.$$

令 $H_\omega = 2\pi i H_{\tilde{\omega}}$, 則 $H_{\tilde{\omega}} \in \mathfrak{h}_u$ 而

$$\omega(H') = 2\pi i(H', H_{\tilde{\omega}}), \ H' \in \mathfrak{h}_u.$$

令 $\tilde{\omega}(H') = (H', H_{\tilde{\omega}})$, 故称 $\tilde{\omega}$ 为 $\mathfrak{h}_u$ 的权. 特别, 对根 α, 有 $H_{\tilde{\alpha}} \in \mathfrak{h}_u$ 使

$$\alpha(H') = 2\pi i(H', H_{\tilde{\alpha}}), \ H' \in \mathfrak{h}_u.$$

令

$$\tilde{\alpha}(H') = (H', H_{\tilde{\alpha}}),$$

称 $\tilde{\alpha}$ 为 $\mathfrak{g}_u$ 的根.

再設 $E_{\tilde{\alpha}}(\alpha\in\Sigma)$构成 $\mathfrak{g}$ 的一組 Weyl 基,則 $[\mathfrak{g}_u]$ 的結构公式可写作

$$[H_1', H_2'] = 0, \quad H_1', H_2'\in\mathfrak{h}_u$$

$$[H', E_{\tilde{\alpha}}] = 2\pi i\tilde{\alpha}(H')E_{\tilde{\alpha}},$$

$$[E_{\tilde{\alpha}}, E_{-\tilde{\alpha}}] = 2\pi i H_{\tilde{\alpha}},$$

$$[E_{\tilde{\alpha}}, E_{\tilde{\beta}}] = N_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}E_{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}},$$

$$N_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} = 0 \text{当且仅当} \alpha+\beta\notin\Sigma$$

$$\sigma(E_{\tilde{\alpha}}) = -E_{-\tilde{\alpha}} \ (\sigma \text{ 为 } \mathfrak{g}_u \text{ 相应的 } \mathfrak{g} \text{ 的半对合}).$$

容易看出,$\mathfrak{h}_u$ 卽由一切 $H_{\tilde{\alpha}}(\alpha\in\Sigma)$的实系数綫性組合所构成. $\mathfrak{g}_u$ 的 Killing 型对 $\mathfrak{g}_u$ 的限制給出 $\mathfrak{h}_u$ 的一个定負的度量. 令

$$(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = -(H_{\tilde{\alpha}}, H_{\tilde{\beta}}),$$

則 $\mathfrak{g}_u$ 的根的全体亦成一 σ 系. 对于 $\mathfrak{h}_u$ 中任一次序, $\mathfrak{g}_u$ 的素根成一 π 系.易見, $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{g}_u$ 有相似的根系和基础根系, 比例因子为 $(2\pi)^2$, 卽

$$(\alpha, \beta) = (2\pi)^2(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}).$$

因此可用 $\mathfrak{g}$ 的 Dynkin 图来代表 $\mathfrak{g}_u$.

从第十章的結果立刻推知

定理 14. 1)設 ρ 是 $\mathfrak{g}_u$ 的一个不可約表示, V 为表示空間,則 V 由权向量生成, 而且存在唯一的一个权 $\tilde{\omega}_0$ (相对于一組基础根系而言),称为首权,使得 ρ 的权皆有形状

$$\tilde{\omega}_0-\tilde{\alpha}_{i_1}-\tilde{\alpha}_{i_2}\cdots-\tilde{\alpha}_{i_k}, \tilde{\alpha}_{i_1},\cdots,\tilde{\alpha}_{i_k}\in\Pi,$$

而 ω_0 是单权. 又如 $\tilde{\omega}$ 是权, $\tilde{\alpha}$ 是根, 則 $\dfrac{2(\tilde{\omega},\tilde{\alpha})}{(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha})}$ 是整数而 $\tilde{\omega}-\dfrac{2(\tilde{\omega},\tilde{\alpha})}{(\tilde{\alpha},\tilde{\alpha})}\tilde{\alpha}$ 也是权,幷与 $\tilde{\omega}$ 有相同的重数.

2) $\mathfrak{g}_u$ 的任一不可約表示皆由它的首权唯一确定.

3) $\mathfrak{h}_u$ 上的一个实綫性函数 $\tilde{\omega}$ 是 $\mathfrak{g}_u$ 的某一不可約表示的首权,当且仅当

$$\frac{2(\tilde{\omega},\tilde{\alpha}_i)}{(\tilde{\alpha}_i,\tilde{\alpha}_i)} \text{ 是 } \geqslant 0 \text{ 的整数.}$$

4) $\mathfrak{g}_u$ 有 n 个基本表示 $\rho_1, \cdots, \rho_n$，它們的首权 $\tilde{\omega}_1, \cdots, \tilde{\omega}_n$ 适合条件

$$\frac{2(\tilde{\omega}_i, \tilde{\alpha}_j)}{(\tilde{\alpha}_j, \tilde{\alpha}_j)} = \delta_{ij}.$$

§5. 复半单代数的实形

引理 3. 1) 設 $\mathfrak{g}$ 是个复李代数，$\mathfrak{g}_0$ 是它的一个实形，而 σ 是相应的半对合．設 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个复子空間，而 $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0$，則 $\mathfrak{h}$ 由 $\mathfrak{h}_0$ 在 C 上生成，当且仅当 $\sigma(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. 这时，$\mathfrak{h}$ 一定是 $\mathfrak{h}_0$ 的复扩充．

2) 設 τ 是 $\mathfrak{g}$ 的另一半对合而 $\sigma\tau = \tau\sigma$. 以 $\mathfrak{g}_\tau$ 表相应于 τ 的实型．令

$$\mathfrak{g}_\tau^\pm = \{X \in \mathfrak{g}_\tau \text{ 使得 } \sigma(X) = \pm X\},$$

則

$$\mathfrak{g}_\tau = \mathfrak{g}_\tau^+ \dotplus \mathfrak{g}_\tau^-, \quad \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_\tau^+ + i\mathfrak{g}_\tau^-.$$

証． 1) 設 $\mathfrak{h}$ 由 $\mathfrak{h}_0$ 在 C 上生成，則 $Z \in \mathfrak{h}$ 可表成 $Z = X + iY$，$X, Y \in \mathfrak{h}_0$，于是 $\sigma(Z) = X - iY$. 因此 $\sigma(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$. 又因 $\sigma^2 = 1$，故 $\sigma(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$. 反之，設 $\sigma(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ 而 $Z \in \mathfrak{h}$，則 $X = \frac{1}{2}(Z + \sigma(Z))$ 和 $Y = \frac{1}{2i}(Z - \sigma(Z)) \in \mathfrak{h}_0 = \mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}_0$，而 $Z = X + iY$. 于是 $\mathfrak{h}$ 由 $\mathfrak{h}_0$ 生成．

如果 $\sigma(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$，自然 $\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{h}_0$ 的复扩充．

2) 設 $\sigma\tau = \tau\sigma$. 如 $X \in \mathfrak{g}_\tau$，則 $\tau(\sigma(X)) = \sigma(\tau(X)) = \sigma(X)$，因此 $\sigma(\mathfrak{g}_\tau) = \mathfrak{g}_\tau$. 于是，如将 $\mathfrak{g}_\tau$ 看作一个实空間，則 σ 就是 $\mathfrak{g}_\tau$ 上一个綫性变换而 $\sigma^2 = 1$. 因此

$$\mathfrak{g}_\tau = \mathfrak{g}_\tau^+ \dotplus \mathfrak{g}_\tau^-.$$

又，$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_\tau \dotplus i\mathfrak{g}_\tau = \mathfrak{g}_\tau^+ + \mathfrak{g}_\tau^- + i\mathfrak{g}_\tau^+ + i\mathfrak{g}_\tau^-$，故

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_\tau^+ + i\mathfrak{g}_\tau^-.$$

定理 15. 設 $\mathfrak{g}$ 是复半单李代数，$\mathfrak{g}_0$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个实型而 σ 是相应的半对合，于是

1) $\mathfrak{g}$ 有一紧致实形 $\mathfrak{g}_u$ 被 σ 保持不变，即 $\sigma(\mathfrak{g}_u)=\mathfrak{g}_u$. 因之 σ 为 $\mathfrak{g}_u$ 的自同构而 $\sigma^2=1$（称 σ 为 $\mathfrak{g}_u$ 的对合自同构）.

2) 令 $\mathfrak{g}_u^+=\mathfrak{g}_0\cap\mathfrak{g}_u$，則 $\mathfrak{g}_u^+$ 是 $\mathfrak{g}_u$ 中不动点的全体. 再令 $\mathfrak{g}_u^-=\{X\in\mathfrak{g}_u$ 使得 $\sigma(X)=-X\}$，則 $\mathfrak{g}_u^+$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的紧致子代数而

$$\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}_u^++i\mathfrak{g}_u^-,\quad \mathfrak{g}_u=\mathfrak{g}_u^++\mathfrak{g}_u^-.$$

証. 1) 根据定理12, $\mathfrak{g}$ 有一个 Cartan 子代数 $\mathfrak{h}$ 被 σ 保持不动，即 $\sigma(\mathfrak{h})=\mathfrak{h}$. 在定理 12 中也証明了 σ 引起 $\mathfrak{g}$ 的根的一个置換，而

$$\sigma(H_\alpha)=H_{\tilde{\alpha}},\qquad \tilde{\alpha}(H)=\overline{\alpha(\sigma(H))}.$$

設 $E_\alpha(\alpha\in\Sigma)$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一組 Weyl 基. 由

$$[H, E_\alpha]=\alpha(H)E_\alpha$$

推出

$$[\sigma(H), \sigma(E_\alpha)]=\overline{\alpha(H)}\sigma(E_\alpha),$$

即

$$[H, \sigma(E_\alpha)]=\tilde{\alpha}(H)\sigma(E_\alpha).$$

因此 $\sigma(E_\alpha)=\rho_\alpha E_{\tilde{\alpha}}$. 由 §3 中引理知 ρ_α 适合

$$\bar{\rho}_\alpha\rho_{\tilde{\alpha}}=1,$$

$$\rho_\alpha\rho_{-\alpha}=1,$$

$$\rho_{\alpha+\beta}N_{\alpha\beta}=\rho_\alpha\rho_\beta N_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}.$$

按下式来定义 $\mathfrak{g}$ 的一个半綫性映射：

$$\tau(H_0)=-H_0,\quad H_0\in\mathfrak{h}_0$$

$$\tau(E_\alpha)=-|\rho_\alpha|E_{-\alpha},\quad \alpha\in\Sigma.$$

我們来驗証 §3 中引理的条件(1),(2),(3)成立. 我們有

$$\overline{(-|\rho_\alpha|)}(-|\rho_{-\alpha}|)=|\rho_\alpha\rho_{-\alpha}|=1,$$

$$(-|\rho_\alpha|)(-|\rho_{-\alpha}|)=|\rho_\alpha\rho_{-\alpha}|=1.$$

这是(1)和(2). 因 $N_{\alpha\beta}=-N_{-\alpha,-\beta}$，故(3)等价于

$$|\rho_{\alpha+\beta}|=|\rho_\alpha||\rho_\beta|.$$

我們知道

$$(H_\alpha, H_\beta)=\overline{(\sigma(H_\alpha), \sigma(H_\beta))}=\overline{(H_{\tilde{\alpha}}, H_{\tilde{\beta}})}=(H_{\tilde{\alpha}}, H_{\tilde{\beta}}),$$

即

$$(\alpha, \beta)=(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}),$$

于是 $\alpha \to \tilde{\alpha}$ 是 Σ 的一个自合同. 因此

$$N^2_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2}(\alpha, \alpha)q(1+p) = \frac{1}{2}(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha})q(1+p) = N^2_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}.$$

这样,取 $\rho_{\alpha+\beta}N_{\alpha,\beta} = \rho_\alpha\rho_\beta N_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta}}$ 双方之絕对值,卽得

$$|\rho_{\alpha+\beta}| = |\rho_\alpha||\rho_\beta|.$$

这样, 根据 §3 中引理 1 推出 τ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个半对合. 以 $\mathfrak{g}_u$ 表 τ 的不动点的全体,現在証明 $\mathfrak{g}_u$ 是紧致的. 設 $X \in \mathfrak{g}$,写

$$X = \sum_{i=1}^{n} c_i H_{\alpha_i} + \sum_{\alpha\in\Sigma} \tau_\alpha E_\alpha,\ c_i,\ \tau_\alpha \text{ 复数}$$

則

$$\tau(X) = -\sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i H_{\alpha_i} - \sum_{\alpha\in\Sigma} \bar{\tau}_\alpha |\rho_\alpha| E_{-\alpha}.$$

于是

$$\begin{aligned}(X, \tau(X)) &= -\left(\sum_{i=1}^{n} c_i H_{\alpha_i}, \sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i H_{\alpha_i}\right) - \sum_{\alpha\in\Sigma} \tau_\alpha\bar{\tau}_\alpha |\rho_\alpha| \\ &= -\sum_{i,j=1}^{n} c_i\bar{c}_j (H_{\alpha_i}, H_{\alpha_j}) - \sum_{\alpha\in\Sigma} \tau_\alpha\bar{\tau}_\alpha|\rho_\alpha| \leqslant 0,\end{aligned}$$

卽$(X, \tau(X))$定負. 因此,根据定理 11, $\mathfrak{g}_u$ 是紧致的.

我們再証明 $\sigma\tau = \tau\sigma$. 設 $H_0 \in \mathfrak{h}_0$,則

$$\begin{aligned}\sigma\tau(H_0) &= \sigma(-H_0) = -\sigma(H_0), \\ \tau\sigma(H_0) &= -\sigma(H_0),\ \text{因 } \sigma(\mathfrak{h}_0) = \mathfrak{h}_0, \\ \sigma\tau(E_\alpha) &= \sigma(-|\rho_\alpha|E_{-\alpha}) = -|\rho_\alpha|\rho_{-\alpha}E_{-\tilde{\alpha}} \\ &= -\frac{|\rho_\alpha|}{\rho_\alpha} E_{-\tilde{\alpha}}, \\ \tau\sigma(E_\alpha) &= \tau(\rho_\alpha E_{\tilde{\alpha}}) = \bar{\rho}_\alpha(-|\rho_{\tilde{\alpha}}|)E_{-\tilde{\alpha}} \\ &= -\frac{\bar{\rho}_\alpha}{|\bar{\rho}_\alpha|} E_{-\tilde{\alpha}} = -\frac{|\rho_\alpha|}{\rho_\alpha} E_{-\tilde{\alpha}}\end{aligned}$$

(因 $\rho_\alpha\bar{\rho}_\alpha$ 为正实数). 因此 $\sigma\tau = \tau\sigma$.

現在設 $X \in \mathfrak{g}_u$,則

$$\sigma(X) = \sigma\tau(X) = \tau\sigma(X),$$

因此 $\sigma(X)\in \mathfrak{g}_u$. 这証明了 $\sigma(\mathfrak{g}_u)=\mathfrak{g}_u$,即 1)成立.

2) 是引理 1 的直接推論,只要注意到 $\sigma\tau=\tau\sigma$. 定理 15 証毕。

設 $\mathfrak{g}_0$ 是个半单实李代数, $\mathfrak{g}_0$ 的一个直和分解

$$\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}_1\dot{+}\mathfrak{g}_2$$

称为 $\mathfrak{g}_0$ 的一个 Cartan 分解,如果 $\mathfrak{g}_1$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的一个子代数而

$$\mathfrak{g}_u=\mathfrak{g}_1\dot{+}i\mathfrak{g}_2$$

是$[\mathfrak{g}_0]$的一个紧致实形. 这时, $\mathfrak{g}_1$ 称为 $\mathfrak{g}_0$ 的一个特征子代数, 它自然是紧致的,而 $\delta=\dim \mathfrak{g}_1-\dim \mathfrak{g}_2$ 称为 $\mathfrak{g}_0$ 的符号差. 定理 15 証明了,半单实代数总有 Cartan 分解存在, 也証明了,对于 Cartan 分解 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}_1\dot{+}\mathfrak{g}_2$,映射

$$\sigma(X)=X \qquad \text{对 } X\in\mathfrak{g}_1,$$
$$\sigma(X)=-X \qquad \text{对 } X\in i\mathfrak{g}_2$$

是 $\mathfrak{g}_u$ 的一个对合自同构.

反之,設 σ 是 $\mathfrak{g}_u$ 的一个对合自同构. 在$[\mathfrak{g}_u]$中取

$$\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}_u^+\dot{+}i\mathfrak{g}_u^-,\ \mathfrak{g}_u^\pm=\{X\in\mathfrak{g}_u \text{ 使得 } \sigma(X)=\pm X\}.$$

可証 $\mathfrak{g}_0$ 是$[\mathfrak{g}_u]$ 的一个实形而 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}_u^+\dot{+}i\mathfrak{g}_u^-$ 是 $\mathfrak{g}_0$ 的一个 Cartan 分解. 于是我們得出結論:

定理 16. 設 $\mathfrak{g}_u$ 是一个半单紧致代数, τ 是 $\mathfrak{g}_u$ 的一个对合自同构. 令$\mathfrak{g}_u^\pm=\{X\in\mathfrak{g}$使得$\tau(X)=\pm X\}$,則 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}_u\dot{+}i\mathfrak{g}_u^-$ 是个半单实代数而$[\mathfrak{g}_0]=[\mathfrak{g}_u]$. 反之,如 $\mathfrak{g}_0$ 是任一半单实代数,則有一紧致半单代数 $\mathfrak{g}_u$ 和 $\mathfrak{g}_u$ 的一个对合自同构 τ 存在,使 $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}_u^+\dot{+}i\mathfrak{g}_u^-$.

这样, 决定一切半单实代数的問題卽化为决定一切半单紧致代数的对合自同构的問題[1].

---

1) 关于这个問題的解决以及对实单代数分类的应用, 請参閱 "F. Gantmacher, Canonical representation of automorphisms of a complex semi-simple Lie group, *Мат. Сборник*, **5** (1939), 101—146" 和 "F. Gantmacher, On the classification of real simple Lie groups, *Мат. Сборник*, **5** (1939), 217—249"以及"严志达,李羣与微分几何,第四章,人民教育出版社,北京,1961".

索　引

三　划

四　划

五　划

六　划

七　划

八　划

九 划

十 划

十一划

十二划

十四划

十六划

其 他

[ＧｅｎｅｒａｌＩｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ]
书名= 李代数
作者= 万哲先编著
页数= ３００
ＳＳ号= １００６８９７７
出版日期=